Высшая школа экономики. Факультет математики
Итоговая государственная аттестация

Образцы задач. Версия 2018 г.

1. Пусть $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, такая, что $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Докажите, что уравнение $f(x) = 0$ имеет хотя бы один корень на интервале $(0,1)$.

2. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin 1 \sin 2 \cdots \sin n)$.

3. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такие, что
$$|f(x) - f(y)| \leq (x-y)^2$$
при всех $x,\ y \in \mathbb{R}$.

4. Найдите восьмую производную функции $f(x) = \sin(\sin(x))$ в точке $x = 0$.

5. Докажите, что
$$0 < e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$
при всех $x > 0$.

6. Рассмотрим отображение $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданное формулой $\phi(x,y) = (x, y + x^2)$. Найдите образ вектора $(1,2)$ при отображении первого дифференциала $d_{(1,1)}\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ отображения ϕ в точке $(1,1)$.

7. Сходится ли ряд $-1 + \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{5} + \frac{3}{6} - \cdots - \frac{1}{2n-1} + \frac{3}{2n} - \cdots$?

8. Равномерно ли сходится ряд $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^n}{n}$ на отрезке $[-1,0]$?

9. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^{n^2}}{2^n}$.

10. Придумайте функцию $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, имеющую в точке $x_0 \in \mathbb{R}^2$ производную по любому направлению, непрерывную в x_0, но не дифференцируемую в x_0.

11. Найдите $\frac{\partial^{50} f}{\partial x^{24} \partial y^{26}}(0,0)$ для $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$.

12. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^2$ — открытое множество, $(x_0, y_0) \in U$, и пусть функция $F \in C^2(U)$ такова, что $F'_y(x_0,y_0) \neq 0$. Пусть $y = f(x)$ — функция, неявно заданная уравнением $F(x,y) = 0$ в окрестности (x_0,y_0). Выразите $f''(x_0)$ через частные производные функции F.

13. Около прямоугольного параллелепипеда со сторонами $2a$, $2b$ и $2c$ опишите эллипсоид наименьшего объема.

14. Найти радиус R сходимости степенного ряда $\sum (n2^n)^{-1}x^n$. Сходится ли этот ряд на промежутках $(-R, 0]$ и $[0, R)$ равномерно?

15. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_a^b \sqrt[3]{(b-x)(x-a)^2}dx$ при $b > a$.

16. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt[3]{(b-x)(x-a)^2}}dx$ при $b > a$.

17. Доказать, что ряд $\sum (p_n)^{-1}$ расходится (p_n — это n-е простое число).

18. Пусть функция $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ — монотонная функция, и пусть интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Докажите, что $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \big(xf(x)\big) = 0$.

19. Найти площадь петли кривой $(x^2+y^2)^2 = 2xy,\ x>0, y>0$.

20. Найти площадь петли кривой $(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})^2 = x^2y$.

21. Вычислите интеграл. Контур обходится один раз в положительном направлении (против часовой стрелки).

    (a) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z \cos \pi z}{z^2+2z} dz$;

    (b) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{tg} z}{z e^{1/(z+2)}} dz$;

    (c) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz$;

    (d) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^{-1/z}}{z^2+1} dz$.

22. Вычислите несобственный интеграл.

    (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10} dx$;

    (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2\cos x}{(x^2+1)^2} dx$;

    (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+x^2+x^4} dx$;

    (d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$;

23. Приведите пример последовательности неотрицательных ограниченных борелевских функций на $[0,1]$, поточечно сходящейся к нулю, но не имеющей предела по норме пространства $L^1[0,1]$.

24. Приведите пример последовательности неотрицательных ограниченных борелевских функций на $[0,1]$, сходящейся к нулю по норме пространства $L^1[0,1]$, но не имеющей поточечного предела ни в одной точке.

25. Вычислите интеграл $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} \cos(x^2+y^2)dxdy$, где $a>0$.

26. Решите дифференциальное уравнение
$$y' = (1+y^2)\cos x\,.$$

27. Решите дифференциальное уравнение
$$y' = \frac{y-3x}{x+3y}\ .$$

28. Найдите общее решение дифференциального уравнения
$$y'' + y = x\sin x\ .$$

29. Найдите общее решение системы
$$\begin{cases} \dot{x} = 5x + 3y, \\ \dot{y} = -3x - y, \end{cases}$$
и нарисуйте фазовый портрет.

30. Колебания пружинного маятника массы m с коэффициентом жесткости пружины k^2 затухают благодаря трению, пропорциональному скорости маятника. При каком коэффициенте трения маятник не дойдет до положения равновесия ни разу за конечное время; пройдет это положение 1 раз, пройдет положение равновесия бесконечно много раз?

31. Вычислите амплитуду вынужденных колебаний (эквивалентно, колебаний в установившемся режиме) пружинного маятника массы m с коэффициентом жесткости пружины k^2 под действием внешней силы $F = \sin \omega t$ в отсутствие силы трения. Напишите решение в случае $\omega = 1$.

32. (a) Вычислите амплитуду вынужденных колебаний (эквивалентно, колебаний в установившемся режиме) пружинного маятника массы m под действием внешней силы $F = \sin \omega t$, если коэффициент жесткости равен k^2, а коэффициент трения равен a.

    (b) Для какой частоты ω колебаний внешней силы амплитуда вынужденных колебаний максимальна?

33. Является ли подмножество в $\mathbb{R}^2$, состоящее из точек с иррациональными координатами (a) открытым, (b) замкнутым, (c) связным, (d) линейно связным, (e) всюду плотным?

34. Докажите, что всякое открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ можно представить в виде объединения счетного числа замкнутых множеств.

35. Какие из букв `A, O, T, K, B` гомеоморфны? Гомотопически эквивалентны?

36. Пусть X – хаусдорфово пространство, и пусть $K_1, K_2 \subset X$ – его компактные подмножества. Докажите, что если $K_1 \cap K_2 = \varnothing$, то существуют такие открытые подмножества $U_1, U_2 \subset X$, что $U_1 \supset K_1$, $U_2 \supset K_2$ и $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

37. На каждой прямой $\ell \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$, проходящей через начало координат, выбрана точка $a(\ell)$ таким образом, что $a(\ell)$ непрерывно зависит от ℓ. Докажите, что хотя бы на одной прямой выбрано начало координат.

38. Опишите карты грассманиана двумерных подпространств в четырехмерном пространстве. Компактно ли это многообразие?

39. Опишите касательное пространство к $SO(3)$ в единичной матрице как подмножество пространства всех матриц 3×3.

40. При каких c множество $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + x^3 - y^2 = c\}$ является гладким подмногообразием в $\mathbb{R}^3$?

41. Постройте бесконечно гладкую функцию на плоскости, обращающуся в ноль во всех точках луча $(0, y), y \leq 0$ и ненулевую во всех других точках плоскости.

42. Дифференциальная форма $2xdz \wedge dy + z^2 dx \wedge dy$ определяет кососимметрическую билинейную форму на касательном пространстве к $\mathbb{R}^3$ в каждой точке. Какие векторы принадлежат ядру этой формы?

43. Проинтегрируйте форму $ydy \wedge dz$ по сфере $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

44. Определим на $\mathbb{R}^3$ дифференциальную форму $\omega = 2xy^3 zdx + 3x^2 x^2 zdy + xydz$. Вычислите значение ω на векторном поле $v = y\partial/\partial x + z\partial/\partial y$, а также найдите выражение для формы $\omega \wedge d\omega$.

45. Найдите жорданову нормальную форму оператора третьей производной на пространстве многочленов от одной переменной степени не выше n.

46. Докажите. что у любого набора попарно коммутирующих операторов на конечномерном пространстве есть общий собственный вектор.

47. Найдите размерность пространства многочленов от n переменных общей степени k.

48. Существует ли матрица, характеристический многочлен которой равен χ, а минимальный μ, где

    (a) $\chi(\lambda) = (\lambda^6 - 1),\ \mu(\lambda) = (\lambda^3 - 1)$;

    (b) $\chi(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^3,\ \mu(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$;

    (c) $\chi(\lambda) = (\lambda - 1)^5(\lambda - 2)^5,\ \mu(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^3$?

    Если да, приведите пример такой матрицы. Если нет, докажите.

49. Докажите, что в евклидовом пространстве равенство $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ возможно лишь в случае, когда векторы x и y отличаются неотрицательным скалярным множителем.

50. Докажите, что на комплексном векторном пространстве неотрицательно определенная билинейная форма (т.е. билинейная форма f, удовлетворяющая условию $f(x, x) \geq 0$ для всех x) тождественно равна нулю.

51. Пусть T — линейный оператор в векторном пространстве X. Положим $X_0 = \operatorname{Ker} T$ и обозначим через T_0 линейный оператор в факторпространстве X/X_0, действующий по формуле $T_0(x + X_0) = T(x) + X_0$ (где $x \in X$). Докажите, что $T^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда $T_0^{n-1} = 0$.

52. Пусть X — конечномерное векторное пространство, T — линейный оператор в X, матрица которого в некотором базисе $(e_1, \ldots, e_n)$ — жорданова клетка. Докажите, что подпространство $Y \subseteq X$ T-инвариантно тогда и только тогда, когда $Y = \langle e_1, \ldots, e_k \rangle$ для некоторого k.

53. Докажите, что линейный оператор T в конечномерном векторном пространстве над алгебраически замкнутым полем K диагонализуем тогда и только тогда, когда для любого $\lambda \in K$ выполнено равенство $\operatorname{rk}(T - \lambda 1) = \operatorname{rk}(T - \lambda 1)^2$.

54. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ найдите расстояние от начала координат до аффинной гиперплоскости, заданной уравнением $x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 1$.

55. Пусть V — n-мерное векторное пространство над $\mathbb{R}$, F — квадратичная форма с положительным индексом инерции p и отрицательным индексом инерции q. Чему равна максимальная размерность такого подпространства $W \subseteq V$, что $F|_W = 0$?

56. Пусть в евклидовом пространстве V задан самосопряженный оператор A, у которого все корни характеристического многочлена меньше единицы. Докажите, что A переводит единичный шар с центром в нуле в себя.

57. Известно, что минимальный многочлен оператора A в конечномерном комплексном векторном пространстве V не имеет кратных корней. Докажите, что число инвариантных подпространств в V конечно тогда и только тогда, когда все собственные значения A различны.

58. Существует ли поле из 6 элементов?

59. Что можно сказать про группу, у которой нет нетривиальных собственных подгрупп?

60. Изоморфны ли группы $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} \subset \mathbb{H}$ (где $\mathbb{H}$ — тело кватернионов) и группа диэдра D_4 (т.е. группа симметрий квадрата)?

61. Постройте изоморфизм групп S_3 и $SL_2(\mathbb{Z}_2)$.

62. Положим $U_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$ и $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Докажите, что группы $\mathbb{C}^\times / U_n$ и $\mathbb{C}^\times$ изоморфны.

63. Докажите, что симметрическая группа S_n порождается двумя элементами.

64. Разлагается ли группа $GL(2, \mathbb{R})$ в прямое произведение подгрупп $SL(2, \mathbb{R})$ и $D = \{\lambda E : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$? Верно ли аналогичное утверждение для $GL(3, \mathbb{R})$?

65. Докажите, что любая подгруппа конечно порожденной абелевой группы конечно порождена.

66. Докажите, что конечная абелева группа G порядка n является циклической тогда и только тогда, когда для любого d, делящего n, в G существует единственная подгруппа порядка d.

67. Пусть R — евклидово кольцо, $u \in R \setminus \{0\}$ — элемент наименьшей нормы. Докажите, что u обратим.

68. Пусть p — минимальное число, делящее порядок конечной группы G, а $H \subset G$ — подгруппа индекса p. Докажите, что H обязательно нормальна.

69. Пусть конечная группа G имеет две факторгруппы F_1 и F_2, порядки которых взаимно просты, причем $|G| = |F_1| \cdot |F_2|$. Докажите, что $G \cong F_1 \times F_2$.

70. Приведите пример двух изоморфных, но не совпадающих подколец в $\mathbb{C}$.

71. Является ли кольцо $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ евклидовым?

72. Некоторый оператор T на векторном пространстве удовлетворяет уравнению

$$T^2 - 5T + 6I = 0.$$

где I — тождественный оператор. Чему могут быть равны собственные значения оператора T?

73. Существует ли вещественная 3×3 матрица A, удовлетворяющая уравнению

$$A^2 + A + 7I = 0?$$

Через I обозначена единичная 3×3 матрица.

74. Для вещественной 2×2-матрицы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ найдите собственные числа и собственные значения оператора M_A на пространстве 2×2-матриц, действующего по формуле

$$M_A : X \mapsto AX.$$

75. Докажите, что в n-мерном комплексном векторном пространстве всякий линейный оператор имеет инвариантное подпространство размерности $n - 1$.

76. Группа действует с двумя орбитами на множестве из пяти элементов. При этом действие точное (то есть только единичный элемент группы действует как тождественное преобразование). Одна орбита состоит из двух элементов, а вторая — из трёх. Найдите все такие группы с точностью до изоморфизма.

77. Изоморфны ли группы D_{mn} и $D_m \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$? (Здесь D_k — группа симметрий правильного k-угольника.)

78. Может ли поле из 9 элементов быть подполем поля из 27 элементов?

79. Сколько существует k-мерных векторных подпространств в n-мерном векторном пространстве над полем из q элементов? При фиксированных k и n найдите предел этой величины при $q \to 1$.

80. Сколько существует $n\times n$-матриц с определителем 1 над полем из q элементов?

81. Найдите ранг матрицы, присоединенной к $n\times n$-матрице M ранга $n-1$ (т.е. матрицы, составленной из алгебраических дополнений элементов M.)

82. Докажите равенства $\operatorname{Im} F^* = \operatorname{Ann}\operatorname{Ker} F$ и $\operatorname{Ker} F^* = \operatorname{Ann}\operatorname{Im} F$ для пары двойственных линейных отображений
$$F\colon V\to W,\qquad F^*\colon W^*\to V^*$$
между конечномерными векторными пространствами.

83. Докажите соотношения для обобщенных чисел сочетаний
$$\text{а)}\quad \binom{-a}{k} = (-1)^k\binom{a+k-1}{k},\qquad \text{б)}\quad \binom{a}{k}+\binom{a}{k-1} = \binom{a+1}{k}.$$

84. Вычислите производящие функции для последовательностей
$$\text{а)}\quad 1^2, 2^2, 3^2, \dots, k^2, \dots \qquad\qquad \text{б)}\quad n^2, (n+1)^2, (n+2)^2, \dots, (n+k)^2, \dots$$

85. Докажите соотношения
$$\text{а)}\quad \sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{n}{k} = \binom{a+n}{n},\qquad \text{б)}\quad \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k}s^k = \frac{(1+\sqrt{s})^n+(1-\sqrt{s})^n}{2}.$$

86. Найдите производящую функцию чисел Фибоначчи. Выведите явную формулу для n-ого числа Фибоначчи.

87. Найдите производящую функцию последовательности, заданной начальными условиями и рекуррентным соотношением
$$a_0=1,\quad a_1=1,\quad a_n=3a_{n-1}+4a_{n-2}\ \ (n>1)\,.$$

88. Производящая функция последовательности (a_n) имеет вид $A(s)=\frac{1+4s-3s^2}{1-4s+3s^2}$. Начиная с какого номера n члены последовательности представляются как значения квазимногочлена? Укажите этот квазимногочлен.

89. Последовательности (a_n) и (b_n) заданы рекуррентными соотношениями и начальными условиями
$$\begin{aligned} a_0=5,\quad a_1=3,\qquad & a_n=2a_{n-1}+3a_{n-2}\ (n>1);\\ b_0=1,\quad b_1=4,\qquad & b_n=5b_{n-1}-6b_{n-2}\ \ (n>1). \end{aligned}$$
Сравните числа a_n и b_n при достаточно больших n.

90. Случайные величины ξ и η таковы, что $\xi^2+\eta^2=1$ и $D\xi>0,\ D\eta>0$. Могут ли величины ξ и η быть независимыми?

91. Пусть $\xi_1,\dots,\xi_n$ – независимые и одинаково распределенные (с функцией распределения F) случайные величины. Через $\xi_{(k)}$ обозначаем k-е по порядку значение величин ξ_i, расположенных в порядке возрастания. Найдите распределения $\xi_{(1)}$ и $\xi_{(2)}$.

92. Из отрезка $[-1,1]$ выбирается точка ξ следующим образом. Бросается монета, которая равновероятно падает «орлом» вверх, «решеткой» вверх, или становится на ребро. Если монета встала на ребро, то $\xi=0$. Если упала вверх «орлом», то ξ случайно выбирается из отрезка $[-1,0]$. Если упала вверх «решеткой», то ξ случайно выбирается из $[0,1]$. Найдите распределение ξ. Вычислите $E\xi$ и $D\xi$.

93. Величины ξ, η независимы и имеют нормальное распределение с параметрами 0 и 1. Найдите распределение случайного вектора $(3\xi+\eta, \xi-3\eta)$. Вычислите вероятность $P(|3\xi+\eta| > |\xi-3\eta|)$.

94. Последовательности случайных величин ξ_n и η_n сходятся по распределению к случайным величинам ξ и η соответственно. Покажите, что в общем случае нельзя утверждать, что $\xi_n + \eta_n$ сходится по распределению к $\xi + \eta$. Докажите, что $\xi_n + \eta_n$ сходится по распределению к $\xi + \eta$, если дополнительно известно, что величина η является константой.

95. Случайная величина ξ имеет распределение Коши, заданное плотностью

$$\varrho(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Найдите ее характеристическую функцию. Найдите характеристическую функцию и плотность величины $\dfrac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}$, где ξ_i – последовательность независимых случайных величин, имеющих распределение Коши,

96. Рассмотрим множество всех нестрого убывающих последовательностей натуральных чисел. Является ли данное множество счетным, континуальным или оно имеет иную мощность?

97. Рассмотрим множество всех биекций из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$. Является ли данное множество счетным, континуальным или оно имеет иную мощность?

98. Рассмотрим множество непрерывных функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Является ли данное множество счетным, континуальным или оно имеет иную мощность?

99. Приведите к дизъюнктивной нормальной форме следующую формулу:

$$((p \leftrightarrow (p \wedge q)) \to ((r \wedge (p \wedge (r \to q))) \to q)).$$

100. Приведите к дизъюнктивной нормальной форме следующую формулу:

$$(((\neg p \to q) \to (\neg q \to p)) \vee ((r \to p) \to (p \vee q))).$$