Правительство Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"

Факультет бизнеса и менеджмента,
Школа бизнес-информатики

Программа дисциплины

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

для направления 38.03.05 Бизнес-информатика
подготовки бакалавра

Автор программы:

Широков Дмитрий Сергеевич,
кандидат физико-математических наук,
dshirokov@hse.ru, dm.shirokov@gmail.com

Одобрена на заседании Департамента математики Факультета экономических наук

Руководитель департамента Ф. Т. Алескеров «___»___________ 2016 г

Рекомендована секцией УМС «___»____________ 2016 г
Председатель

Утверждена УС факультета «___»_____________2016 г
Ученый секретарь

Москва, 2016

1 Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов направления 38.03.05 «Бизнес-информатика» подготовки бакалавра, изучающих дисциплину «Алгебра и геометрия».

Программа разработана в соответствии с:

- Образовательным стандартом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики» по направлению подготовки 38.03.05 Бизнес-информатика, квалификация: бакалавр;
- Образовательной программой для направления 38.03.05 Бизнес-информатика;
- Рабочим учебным планом университета по направлению 38.03.05 «Бизнес-информатика» подготовки бакалавра.

2 Цели освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины «Алгебра и геометрия» являются:

1) Ознакомление студентов с основами линейной алгебры, аналитической геометрии и общей алгебры.
2) Формирование у студентов навыков использования методов линейной алгебры для формализации и решения прикладных задач, в том числе экономических и геометрических.

3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен

- ***знать:***
  - точные формулировки основных понятий,
  - возможности координатного метода для исследования различных геометрических объектов,
  - основные теоремы о структуре множества решений систем линейных уравнений,
  - основные задачи векторной алгебры и аналитической геометрии,
  - основные виды уравнений простейших геометрических объектов,
  - основные свойства некоторых алгебраических структур (полей вещественных и комплексных чисел, линейного пространства над полем вещественных чисел),
  - основы линейной алгебры, в частности, свойства числовых характеристик матриц: определитель, ранг, размерность пространства строк и столбцов,
  - векторные пространства и их свойства;
- ***уметь:***
  - интерпретировать основные понятия на простых модельных примерах,
  - свободно использовать координатный, векторный, матричный или операторный способы записи математических соотношений,
  - использовать математический язык и математическую символику при построении организационно-управленческих моделей,
  - строить и изучать математические модели конкретных явлений и процессов для решения расчетных и исследовательских задач,

- определять возможности применения теоретических положений и методов математических дисциплин для постановки и решения конкретных прикладных задач,
- исследовать простейшие геометрические объекты по их уравнениям в различных системах координат,
- решать основные задачи линейной алгебры, в частности системы линейных уравнений,
- применять изучаемые методы построения решений систем линейных уравнений,
- решать типовые математические задачи курса, используемые при принятии управленческих решений;

• ***иметь навыки:***
- использования методов аналитической геометрии и векторной алгебры в смежных дисциплинах и экономике,
- формализации и решения прикладных задач линейной алгебры, в том числе экономических.

В результате освоения дисциплины студент осваивает следующие компетенции:

Компетенция	Код по ФГОС/ НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
Способен учиться, приобретать новые знания, умения, в том числе в области, отличной от профессиональной	УК-1	Студент дает правильные определения основных понятий, формулировки теорем, правильно применяет методы решения конкретных задач	Стандартные (лекционно-семинарские)
Способен выявлять научную сущность проблем в профессиональной области.	УК-2	Студент способен к распознаванию естественнонаучных аспектов широкого круга проблем профессиональной деятельности	Стандартные (лекционно-семинарские)
Способен решать проблемы в профессиональной деятельности на основе анализа и синтеза	УК-3	Студент способен решать возникающие проблемы на основе анализа и синтеза	Стандартные (лекционно-семинарские)
Способен работать с информацией: находить, оценивать и использовать информацию из различных источников, необходимую для решения научных и профессиональных задач (в том числе на основе системного подхода)	УК-5	Студент в ходе подготовки к семинарским занятиям, лекциям и при выполнении домашних расчетных заданий получает и совершенствует навыки работы с информационными источниками различного типа	Стандартные (лекционно-семинарские)
Способен вести исследовательскую деятельность, включая анализ проблем, постановку целей и задач, выделение объекта и предмета исследования, выбор способа и методов исследования, а также оценку его качества	УК-6	Студент применяет методы линейной алгебры в исследовательской деятельности	Стандартные (лекционно-семинарские)
Способен критически оценивать и переосмыслять накопленный опыт (соб-	УК-9	Студент способен критически оценивать и переосмысливать накопленный практический опыт на ос-	Стандартные (лекционно-семинарские)

Компетенция	Код по ФГОС/ НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
ственный и чужой), рефлексировать профессиональную и социальную деятельность		нове результатов своей работы	
Способен к саморазвитию, повышению своей квалификации и мастерства	ПК-7	Студент демонстрирует повышение своего мастерства и своей успеваемости	Стандартные (лекционно-семинарские)
Способен обрабатывать, анализировать и систематизировать информацию по теме исследования, используя соответствующий математический аппарат и инструментальные средства	ПК-31	Студент использует аппарат линейной алгебры и инструментальные компьютерные средства, систематически анализирует получаемую информацию в ходе выполнения текущих учебных планов	Стандартные (лекционно-семинарские), выполнение домашнего расчетного задания
Способен готовить научно-технические отчеты, презентации, научные публикации по результатам выполненных исследований	ПК-32	Студент владеет современными средствами подготовки отчетов о проделанной работе, применяет компьютерные методы в ходе компоновки и организации текстов, оценивает необходимость включения в них иллюстративных материалов и интерпретирует полученные результаты	Стандартные (лекционно-семинарские), выполнение домашнего расчетного задания

4 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Алгебра и геометрия» относится к числу дисциплин базовой части математического и естественнонаучного цикла и блоку дисциплин, обеспечивающих профессиональную подготовку бакалавров по направлению 38.03.05 «Бизнес-информатика».

Для успешного усвоения данной дисциплины необходимо, чтобы студент владел знаниями, умениями и навыками, сформированными в процессе изучения программы общеобразовательной школы. Дисциплина основывается на знании числовых систем и функций, изученных в средней школе, а также на основных понятиях курса «Математический анализ», и широко использует умения и наглядные представления, полученные при изучении планиметрии и стереометрии.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

- «Математический анализ»,
- «Дискретная математика»,
- «Теория вероятностей и математическая статистика»,
- «Теория игр»,
- «Теория полезности и принятия решений»,
- «Эконометрика»,
- «Основы информационной безопасности».

5 Тематический план учебной дисциплины

№	Название раздела	Всего часов	Аудиторные часы		Самостоя-тельная работа
			Лекции	Семинары	
Первый модуль		**114**	**20**	**22**	**72**
1	Некоторые сведения из теории определителей и систем линейных уравнений.	10	2	2	6
2	Векторная алгебра.	22	4	4	14
3	Прямая на плоскости, прямая и плоскость в пространстве.	20	4	4	12
4	Кривые второго порядка.	12	2	2	8
5	Алгебра матриц.	12	2	2	8
6	Определители матриц. Обратимые матрицы.	14	2	2	10
7	Матрицы и системы линейных уравнений.	24	4	6	14
Второй модуль		**114**	**18**	**24**	**72**
8	Линейные пространства.	20	4	4	12
9	Комплексные числа.	10	2	2	6
10	Линейные преобразования (операторы) линейных пространств.	36	4	6	24
11	Билинейные и квадратичные формы.	10	2	4	6
12	Евклидовы пространства.	20	4	4	12
13	Линейные преобразования евклидовых пространств.	18	2	4	12
ИТОГО		**228**	**38**	**46**	**144**

6 Формы контроля знаний студентов

Тип контроля	Форма контроля	1 год обучения		Параметры
		1 модуль	2 модуль	
Текущий	Контрольная работа	+	+	Письменная работа (80 мин)
	Домашнее задание	+		
Итоговый	Экзамен			Письменный экзамен (120 мин)

6.1 Критерии оценки знаний, навыков

Для любого из оговоренных в пункте 6 форм контроля требования к ответам студента соотнесены с указанными в пункте 3 компетенциями. Оценки по всем формам контроля выставляются по 10-ти балльной шкале.

Текущий контроль успеваемости осуществляется на практических занятиях в форме опросов или самостоятельных работ (по усмотрению преподавателя), а также контроля выполнения текущих домашних заданий (проводится частичный разбор решений задач на практических занятиях). Также в течение двух модулей предусматривается проведение 2-х контрольных работ (в первом и втором модулях) и проверка 1 обязательного домашнего задания. Повторная сдача работы не допускается. Для тех, кто по уважительной причине пропустил контрольную работу, устраивается дополнительный день сдачи. Форма итогового контроля – письменная экзаменационная работа по окончании второго модуля.

В контрольных работах, обязательном домашнем задании и экзаменационной работе каждое задание оценивается в определенное (указанное в работе) количество баллов, в сумме дающих 10 баллов. Во всех работах могут присутствовать как практические задания, так и задания теоретического характера (сформулировать определение, сформулировать теорему, привести примеры, доказать некоторое утверждение). Решения практических задач засчитываются, если дан не только ответ, а подробное и обоснованное решение.

6.2 Порядок формирования оценок по дисциплине

Методика формирования результирующей оценки по курсу: итоговая оценка по курсу $О_{итог.}$. вычисляется по формуле:

$$О_{итог.} = 0{,}6 \cdot О_{экз} + 0{,}4 \cdot О_{накопл.},$$

где $О_{накопл.} = 0{,}35 \cdot О_{контр.раб.1.} + 0{,}35 \cdot О_{контр.раб.2} + 0{,}2 \cdot О_{дом.зад.} + 0{,}1 \cdot О_{ауд.}$

где $О_{экз}$ – оценка письменной экзаменационной работы, $О_{контр.раб.1}$, $О_{контр.раб.2}$ – оценки контрольных работ, $О_{ауд.}$ – оценка активности на семинарских занятиях, $О_{дом.зад}$ – оценка обязательного домашнего задания. Все формы контроля оцениваются по 10-балльной шкале. Результат подсчета арифметически округляется до целых единиц. Итоговая оценка (за экзамены) по 10-балльной и 5-балльной шкалам проставляется в ведомость.

Таблица соответствия оценок.

10-балльная шкала	10 9 8	7 6	5 4	3 2 1
5-балльная шкала	отлично	хорошо	удовлетворительно	неудовлетворительно

7 Содержание дисциплины

Раздел 1. Векторная алгебра

Тема 1. Введение.

1. Предмет курса. Принципы построения и изучения курса. Краткое содержание. Рекомендации по изучению курса, самостоятельной работе и литературе. О формах контроля и отчетности при изучении курса.
2. Основные методы доказательства математических утверждений. Метод математической индукции.

Литература: [2]: глава 1 §1, 7

Тема 2. Некоторые сведения из теории определителей и систем линейных уравнений.

1. Определители матриц второго и третьего порядка. Примеры.
2. Системы линейных уравнений (2 уравнения и 2 неизвестных, 3 уравнения и 3 неизвестных).
3. Метод Крамера для систем с двумя и тремя неизвестными.

Литература: [2]: глава 1 §3, 4

Тема 3. Векторная алгебра.

1. Линейные операции с векторами плоскости (пространства) и их свойства.
2. Векторы. Единичные орты плоскости и пространства. Координаты векторов.
3. Скалярное произведение, вычисление в координатах.
4. Векторное произведение, вычисление в координатах.
5. Смешанное произведение векторов, его геометрический смысл.
6. Свойства рассматриваемых операций над векторами.

Литература: [6]: глава 9 §2, 3, [8]: глава 2

Раздел 2. Аналитическая геометрия

Тема 4. Системы координат и простейшие задачи, решаемые с использованием векторной алгебры.

1. Аффинная, декартова и полярная системы координат. Координаты точек плоскости (пространства).
2. Деление отрезка в заданном соотношении. Вычисление площадей треугольника и параллелограмма.
3. Вычисление объема параллелепипеда и тетраэдра.

Литература: [6]: глава 9 §1, [8]: глава 1

Тема 5. Прямая линия на плоскости.

1. Различные виды уравнений прямой.
2. Простейшие приложения: вычисление угла между прямыми, определение взаимного расположения двух прямых, условия параллельности и перпендикулярности, определение взаимного расположения точек относительно прямой, вычисление расстояния от точки до прямой, вывод уравнений биссектрис угла.

Литература: [6]: глава 9 §4, [8]: глава 4 §1

Тема 6. Прямая и плоскость в пространстве.

1. Различные виды уравнений плоскости.
2. Простейшие приложения: вычисление расстояния от точки до плоскости, нахождение угла между плоскостями, исследование взаимного расположения плоскостей, условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.
3. Различные уравнения прямой в пространстве.
4. Простейшие приложения: вычисление угла между прямыми, нахождение угла между прямой и плоскостью, исследование взаимного расположения прямой и плоскости.

Литература: [6]: глава 9 §5, [8]: глава 4 §2

Тема 7. Кривые второго порядка.

1. Эллипс, гипербола, парабола. Вывод их уравнений и описание простейших свойств. Упрощение уравнений кривых второго порядка.

Литература: [6]: дополнение Б, [8]: глава 6

Раздел 3. Линейная алгебра и элементы общей алгебры

Тема 8. Алгебра матриц.

1. Определение матрицы. Частные виды матриц.
2. Операции с матрицами и их свойства.
3. Элементарные преобразования матриц.

4. Ступенчатый вид матрицы. Вид Гаусса.

Литература: [2]: глава 2 §1, 3

Тема 9. Определители матриц. Обратимые матрицы.

1. Перестановки элементов конечного множества. Инверсии в перестановках. Четность перестановок. Подстановки. Порядок подстановки. Разложение подстановки в произведение независимых циклов. Умножение подстановок.
2. Определитель матрицы. Свойства определителей.
3. Миноры, алгебраические дополнения. Теорема Лапласа. Разложение определителя по элементам строки и столбца.
4. Определитель с углом нулей. Определитель произведения двух матриц.
5. Обратимые матрицы. Критерий обратимости матриц. Формула для вычисления обратной матрицы.
6. Вычисление определителя матрицы и нахождение обратной матрицы с использованием элементарных преобразований.

Литература: [2]: глава 1 §8, глава 3

Тема 10. Матрицы и системы линейных уравнений.

1. Ранг матрицы. Теорема о ранге матриц. Теорема о базисном миноре. Ранг произведения матриц.
2. Элементарные преобразования систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Критерии совместности и определенности систем линейных уравнений.
3. Метод Гаусса. Главные и свободные неизвестные.
4. Метод Крамера для решения квадратных систем линейных уравнений. Матричные уравнения.

Литература: [2]: глава 2 §2

Тема 11. Линейные пространства.

1. Линейные векторные пространства. Линейная зависимость и линейная независимость векторов. Свойства, связанные с линейной зависимостью. Линейная оболочка системы векторов. Нахождение ее базиса с использованием ступенчатой матрицы.
2. Базис и размерность линейного пространства. Координаты вектора относительно базиса, запись операций над векторами в координатах.
3. Изменение координат вектора при изменении базиса. Матрица перехода от «старого» базиса к «новому».
4. Подпространства линейных пространств и их базисы. Свойства линейно независимых систем векторов в подпространстве. Размерность линейной оболочки конечной системы векторов.
5. Подпространство решений однородной системы линейных уравнений, его базис и размерность. Фундаментальная система решений и общее решение однородной системы линейных уравнений. Связь между решениями неоднородной и соответствующей однородной систем. Векторная форма записи решений.

Литература: [3]: глава 1 §1, 2

Тема 12. Поле комплексных чисел.

1. Поле комплексных чисел. Алгебраическая и тригонометрическая форма записи комплексного числа. Модуль и аргумент. Операции над комплексными числами. Формула Муавра. Формула Эйлера. Показательная форма записи. Извлечение корня n-ой степени из комплексного числа. Геометрические свойства корней из комплексного числа. Решение квадратных уравнений.

Литература: [2]: глава 5 §1

Тема 13. Линейные преобразования (операторы) линейных пространств. Билинейные и квадратичные формы.

1. Линейные операторы и их матрицы. Изменение матрицы линейного оператора при изменении базиса. Подобие матриц.
2. Образ и ядро линейного отображения. Операции над линейными операторами.
3. Собственные значения, собственные векторы линейных операторов. Линейная независимость собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям.
4. Нахождение собственных значений и собственных векторов линейного оператора. Характеристическое уравнение и характеристический многочлен квадратной матрицы.
5. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду.
6. Билинейные и квадратичные формы. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду. Закон инерции квадратичных форм.
7. Положительно определенные квадратичные формы, критерий Сильвестра.

Литература: [3]: глава 2 §1, 2, 3, 4, глава 1 §4

Тема 14. Евклидовы пространства.

1. Евклидово пространство. Неравенство Коши-Буняковского, длины векторов и углы между векторами.
2. Матрица Грама. Ортонормированный базис, процесс ортогонализации Грама-Шмидта.
3. Ортогональные матрицы. Переход от одного ортонормированного базиса к другому.
4. Ортогональное дополнение линейного подпространства в евклидовом пространстве. Ортогональная проекция вектора на подпространство (задача наилучшего приближения).

Литература: [3]: глава 3 §1

Тема 15. Линейные преобразования евклидовых пространств.

1. Самосопряженные преобразования евклидовых пространств.
2. Свойства собственных векторов и собственных значений. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного преобразования в евклидовом пространстве.
3. Ортогональные преобразования. Приведение квадратичной формы к главным осям с помощью ортогональной замены переменных.

Литература: [3]: глава 3 §3

8 Образовательные технологии

Проводятся стандартные лекционно-семинарские занятия и регулярные консультации с ответами на вопросы студентов. Применяются индивидуальные домашние задания.

9 Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

9.1 Тематика заданий текущего контроля

Контрольная работа №1

1. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 2x-y-z=1 \\ x+3y+4z=6 \end{cases}.$$

2. В ортонормированном базисе даны векторы $\vec{a}=(2;3;-1), \vec{b}=(1;-2;3), \vec{c}=(2;-1;1)$. Найти вектор $\vec{d}$ такой, что $\vec{d}\perp\vec{a}, \vec{d}\perp\vec{b}, (\vec{d},\vec{c})=-6$.

3. Вычислить площадь и угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q}$; $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$; $|\vec{p}| = 8, |\vec{q}| = \frac{1}{2}, \angle(\vec{p};\vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.
4. Даны вершины треугольника $A(-1;1), B(5;3), C(1;-1)$. Составить уравнения медианы, биссектрисы и высоты треугольника, проведенных из вершины C.
5. Найти точку M', симметричную точке $M(0;-3;-2)$ относительно прямой
$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1{,}5}{-1} = \frac{z}{1}.$$
6. Даны точки $A(1;0;2), B(2;1;0), C(0;-2;1), D(1;2;0)$. Найти:
   (а) объем пирамиды $ABCD$;
   (б) расстояние между прямыми (AC) и (BD).
7. Определить тип кривой, приведя данное уравнение к каноническому виду, и построить ее
   (a) $2x^2 + 2y^2 + 4x + 4y - 1 = 0$;
   (b) $y^2 - 3x - 2y + 7 = 0$.
8. Составить уравнение множества точек, расстояние каждой из которых от точки $A(3;0)$ вдвое меньше расстояния от точки $B(26;0)$. Сделать чертеж.
9. Составить уравнение множества точек, модуль разности расстояний которых до двух заданных $F_1(0;-3)$ и $F_2(0;2)$ есть величина постоянная, равная 6. Сделать чертеж.

10. Выполнить умножение матриц AB, AB^T, A^TB, A^TB^T, BA^T, B^TA^T, BA, B^TA, а в тех случаях, когда оно не определено, пояснить почему.
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$
11. Вычислить определитель:
$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}.$$
12. Решить матричное уравнение $A \cdot X \cdot B - 4 \cdot D = C^T$, где
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$
13. Найти ранг матрицы в зависимости от параметра λ
$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & 3+\lambda & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$
14. Используя метод Гаусса исследовать систему на совместность; в случае совместности решение записать в виде суммы какого-либо частного решения и общего решения соответствующей однородной системы (выписать векторы, образующие ФСР)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 5x_1 + 9x_2 - 10x_3 - 9x_4 = 0 \end{cases}.$$

Контрольная работа №2

1. Дайте определение линейного подпространства. Докажите, что множество кососимметричных матриц ($A^T = -A$) порядка 2 образует линейное подпространство всех квадратных матриц порядка 2. Найдите его размерность и какой-нибудь базис. Найдите координаты матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ относительно этого базиса.
2. Выделите среди векторов
$$a_1(2,-3,1),\ \ a_2(-2,13,-15),\ \ a_3(-4,11,-9)$$
какой-нибудь базис порожденной ими линейной оболочки, а затем найдите координаты остальных векторов относительного этого базиса.
3. Векторы
$$e_1(1,1,1),\ \ e_2(-1,2,2), e_3(1,3,4) \text{ и } e_1'(-1,2,2),\ e_2'(2,3,-1),\ \ e_3'(3,1,2)$$
заданы координатами относительно некоторого базиса в $\mathbb{R}^3$. Докажите, что эти системы векторов являются базисами. Найдите матрицу перехода от первого базиса ко второму.

4. (a) Вычислить $(2+i)(3-i)+(2+3i)(3+4i)$; $\dfrac{5+i}{3+i}$;

   (b) найти тригонометрическую и показательную формы числа $(1+i\sqrt{3})$;

   (c) используя тригонометрическую форму комплексного числа, вычислить $\sqrt[5]{32}$.

5. Используя критерий Сильвестра, исследовать квадратичную форму
$$A(x_1,x_2,x_3) = -x_1^2 - 3x_2^2 + \lambda x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$$
на положительную или отрицательную определенность в зависимости от параметра λ.

6. (a) Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. Указать базис, в котором матрица оператора является диагональной, и записать эту диагональную матрицу. (b) Вычислить матрицу A^n, $n \in \mathbb{Z}$.
7. Подпространство L_1 в $\mathbb{R}^4$ порождено векторами $(1;-1;4;0)$ и $(1;1;-1;2)$, а подпространство L_2 – векторами $(0;1;-2;3)$ и $(1;-1;5;-1)$. Построить базисы следующих подпространств: пересечения $L_1 \cap L_2$ и ортогонального дополнения к сумме $(L_1 + L_2)^{\perp}$.

Домашняя работа

1. Найти значение выражения $(1;0;-1)\cdot\left(\det(B^T B)E_3 - BB^T\right)\cdot(1;0;-1)^T$, где матрица B имеет вид
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$
2. Выбрать значения i и k так, чтобы произведение $a_{62}a_{i5}a_{33}a_{k4}a_{46}a_{21}$ входило в определитель 6-го порядка со знаком минус.
3. В перестановке $\{1,4,7,...,3n-2,2,5,8,...,3n-1,3,6,9,...,3n\}$ определить число инверсий и указать общий признак тех чисел n, для которых эта перестановка четна, и тех, для которых она нечетна.
4. Определить четность подстановки $\Omega = s \circ t^2 \circ s$, где $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ и

$t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$

Разложить полученную подстановку Ω в произведение независимых циклов.

5. Найти матрицу C^{-1}, обратную к матрице $C = A \cdot B^T + 3E$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}$$

7. (a) Решить систему уравнений с помощью метода Крамера:

$$\begin{cases} 4y_1 + 14y_2 + 21y_3 + 4y_4 = 7 \\ 21y_1 + 23y_2 + 4y_3 + 26y_4 = 14 \\ 26y_1 + 24y_2 + 14y_3 + 18y_4 = 21 \\ 7y_2 + 26y_3 + 2y_4 = 25 \end{cases},$$

(b) Найти общее решение и фундаментальную систему решений системы уравнений:

$$\begin{cases} 25y_1 - 19y_2 - 107y_3 + 120y_4 = 0 \\ -73y_1 - 9y_2 + 74y_3 - 143y_4 = 0 \\ -26y_1 - 9y_2 + 6y_3 - 31y_4 = 0 \\ 26y_1 + 2y_2 - 44y_3 + 64y_4 = 0 \end{cases}.$$

8. Найти базис линейной оболочки данной системы векторов и выразить все векторы системы через элементы базиса:

$$\vec{e}_1 = (1;-1;-11;6); \qquad \vec{e}_2 = (2;-1;-1;1);$$
$$\vec{e}_3 = (2;7;-1;5); \qquad \vec{e}_4 = (5;-21;-55;22);$$
$$\vec{e}_5 = (3;7;9;0); \qquad \vec{e}_6 = (17;6;-40;33).$$

9. Линейное отображение A имеет в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ матрицу $\begin{pmatrix} 20 & 27 & -11 \\ -6 & -7 & 4 \\ 16 & 24 & -7 \end{pmatrix}$. Найти матрицу этого отображения в базисе $\vec{f}_1 = 3\vec{e}_1 + 5\vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = -5\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$.

10. Найти все комплексные корни уравнения $z^2 + (1+5i)z - 6 + 43i = 0$. Для найденных корней представить число $z_0 = \dfrac{z_1 \cdot \bar{z}_2 + z_2 \cdot \bar{z}_1}{\overline{z_1 + z_2}}$ в алгебраической форме.

11. Найти все комплексные корни уравнения $z^4 + \dfrac{1 - i \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2} \cdot (1+i)} = 0$.

9.2 Вопросы для оценки качества освоения дисциплины

1. Система координат. Векторы. Орты, направляющие векторы, направляющие косинусы.

2. Скалярное произведение, вычисление в координатах.
3. Векторное произведение векторов, вычисление в координатах. Геометрический смысл.
4. Смешанное произведение векторов, его геометрический смысл, вычисление в координатах.
5. Прямые и плоскости. Общее уравнение прямой на плоскости и в пространстве. Параметрическое и каноническое уравнения прямой.
6. Вычисление угла между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых. Расстояние от точки до прямой.
7. Общее уравнение плоскости в пространстве. Вычисление угла между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей. Расстояние от точки до плоскости.
8. Взаимное расположение прямых и плоскостей.
9. Эллипс, гипербола, парабола. Их свойства.
10. Сложение матриц, умножение матрицы на число. Умножение матриц. Алгебра квадратных матриц. Элементарные преобразования систем линейных уравнений и матриц.
11. Метод Гаусса. Связь между решениями неоднородной и соответствующей однородной систем. Главные (базисные) и свободные неизвестные.
12. Определитель квадратной матрицы. Свойства определителей. Миноры, алгебраические дополнения, разложение определителя по элементам строки и столбца. Определитель с углом нулей. Определитель произведения двух матриц.
13. Обратная матрица. Критерий существования и формула обратной матрицы. Метод нахождения обратной матрицы с помощью приписывания единичной матрицы.
14. Системы уравнений. Решение матричных уравнений с помощью нахождения обратной матрицы.
15. Ранг матрицы. Теорема о ранге матрицы. Теорема о базисном миноре. Ранг произведения матриц.
16. Фундаментальная система решений и общее решение однородной системы линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.
17. Линейное пространство. Линейная зависимость и линейная независимость векторов. Линейная оболочка системы векторов. Базис, размерность. Координаты вектора относительно базиса, запись операций над векторами в координатах. Теорема об изоморфизме.
18. Изменение координат вектора при изменении базиса. Матрица перехода от старого базиса к новому.
19. Подпространства в линейном пространстве. Размерность линейной оболочки конечной системы векторов.
20. Линейные отображения и линейные преобразования (операторы) линейного пространства. Их матрицы.
21. Образ и ядро линейного отображения.
22. Операции над линейными преобразованиями. Изменение матрицы линейного оператора при изменении базиса.
23. Собственное значение, собственный вектор линейного преобразования. Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих различным собственным значениям.
24. Нахождение собственных значений и собственных векторов. Характеристическое уравнение и характеристический многочлен квадратной матрицы.
25. Приведение матрицы линейного преобразования к диагональному виду.
26. Евклидово пространство. Неравенство Коши-Буняковского, длины векторов и углы между ними.

27. Матрица Грама. Ортонормированный базис, процесс ортогонализации.
28. Переход от одного ортонормированного базиса к другому. Ортогональные матрицы.
29. Ортогональное дополнение линейного подпространства в евклидовом пространстве. Ортогональная проекция вектора на подпространство (задача наилучшего приближения).
30. Самосопряженные преобразования евклидовых пространств. Свойства их собственных векторов и собственных значений. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного преобразования в евклидовом пространстве.
31. Билинейные и квадратичные формы в линейном пространстве.
32. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Закон инерции квадратичных форм.
33. Положительно определенные квадратичные формы, критерий Сильвестра.
34. Квадратичные формы в евклидовом пространстве. Отыскание ортонормированного базиса, в котором квадратичная форма имеет диагональный вид.
35. Поле комплексных чисел. Алгебраическая и тригонометрическая форма записи комплексного числа. Модуль и аргумент. Операции над комплексными числами. Формула Муавра. Формула Эйлера. Показательная форма записи.
36. Извлечение корня n-ой степени из комплексного числа. Геометрические свойства корней из комплексного числа. Решение квадратных уравнений.

9.3 Примеры заданий итогового контроля (экзаменационной работы)

1. Образует ли линейное пространство заданное множество, в котором определены сумма двух любых элементов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и умножение любого элемента $\vec{a}$ на любое число $\alpha \in \mathbb{R}$: множество всех симметричных матриц $\vec{a} = \{a_{ik}\}\,(a_{ki} = a_{ik})$ и $\vec{b} = \{b_{ik}\}\,(b_{ki} = b_{ik})$, $i,k = 1,2,...,n$; сумма $\{a_{ik} + b_{ik}\}$, произведение $\{\alpha a_{ik}\}$? (Ответ обосновать.). Если да, то найти размерность и какой-нибудь базис данного линейного пространства.
2. Дана система векторов $\{\vec{a}_1 = (-1;1;5), \vec{a}_2 = (5;-2;-4), \vec{a}_3 = (-2;2;1), \vec{a}_4 = (-8;5;10)\}$.

(a) Выяснить, будет ли она линейно зависимой или независимой;
(b) найти размерность и базис линейной оболочки векторов;
(c) указать какую-нибудь нетривиальную линейную комбинацию этих векторов (если она существует).

3. Найти координаты вектора $\vec{x} = (2;4;1)$ относительно базиса $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$, если он задан в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$:

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \frac{3}{2}\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}.$$

4. Пусть подпространства *U* и *V* линейного пространства $\mathbb{R}^5$ порождены векторами $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ и $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ соответственно:

$$\vec{u}_1 = (1;1;2;1;2); \qquad \vec{v}_1 = (1;0;1;1;1);$$
$$\vec{u}_2 = (0;-1;-2;1;-1); \quad \vec{v}_2 = (2;-1;-2;5;1).$$
$$\vec{u}_3 = (3;1;2;5;4);$$

(a) Задать подпространство *U* с помощью системы линейных уравнений;
(b) найти базис *U*+*V*;
(c) найти базис $U \cap V$.

5. Отображение φ из множества $\mathbb{R}^2$ в себя задано формулой

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} - (x_1 - x_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_1\begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Является ли это отображение линейным? Если да, записать его матрицу в стандартном базисе.

6. В базисе $e_1^{\downarrow} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, e_2^{\downarrow} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ линейный оператор φ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора φ в базисе $f_1^{\downarrow} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, f_2^{\downarrow} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

7. Записать матрицу линейного оператора φ – ортогонального проектирования пространства $L=\mathbb{R}^3$ на плоскость $x_1 + x_2 = 0$, в ортонормированном базисе

$$\{\vec{e}_1 = (1;0;0), \vec{e}_2 = (0;1;0), \vec{e}_3 = (0;0;1)\}.$$

Найти ядро, ранг и образ оператора φ.

8. Пусть $V=\mathbb{R}^3$ − евклидово пространство со стандартным скалярным произведением. Линейное подпространство U – линейная оболочка векторов $\begin{cases} a_1^{\downarrow} = (1;2;1)^T \\ a_2^{\downarrow} = (3;4;1)^T \\ a_3^{\downarrow} = (1;-3;-1)^T \end{cases}$.

С помощью процесса ортогонализации найти ортонормированный базис U.

9. Пусть V=$\mathbb{R}^4$ − евклидово пространство со стандартным скалярным произведением. Линейное подпространство L – линейная оболочка векторов $\begin{cases} a_1^{\downarrow} = (1;-1;\ 1;\ 1)^T \\ a_2^{\downarrow} = (1;\ 4;-1;0)^T \end{cases}$.

(a) Найти базис ортогонального дополнения $L^{\perp}$;

(b) Найти ортогональную проекцию на подпространство L и ортогональную составляющую вектора $x^{\downarrow} = (2;1;1;0)^T$.

10. Пусть $V=\mathbb{R}^3$ − евклидово пространство со стандартным скалярным произведением. Самосопряженный оператор A задан в стандартном ортонормированном базисе симметрической матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти канонический вид оператора (диагональный вид матрицы) и ортонормированный базис пространства V, состоящий из собственных векторов оператора A.

11. Привести квадратичную форму $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2$

(a) к главным осям (при помощи ортогональной замены переменных),
(b) к каноническому виду (при помощи метода Лагранжа выделения полных квадратов),
(c) проверить закон инерции, определив индексы инерции.

10 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

10.1 Базовый учебник

1. *Проскуряков И.В.* Сборник задач по линейной алгебре. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2005.
2. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Часть 1. – М.: МНЦМО, 2009.
3. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Часть 2. – М.: МНЦМО, 2009.
4. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Часть 3. – М.: МНЦМО, 2009.

10.2 Основная литература

5. *Ильин В.А., Ким Г.Д.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2008.
6. *Бурмистрова Е.Б., Лобанов С.Г.* Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии. – М.: Изд-тво ВШЭ, 2007 г.
7. *Глухов М.М., Елизаров В.П., Нечаев А.А.* Алгебра. Т. 1, 2. – М., Гелиос АРВ, 2003.
8. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Аналитическая геометрия. – М.: Наука, любое издание.
9. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Линейная алгебра. – М.: Наука, любое издание.
10. Сборник задач по алгебре: Учебное пособие/ Под ред. *А.И. Кострикина*. – М.: МНЦМО, 2009.
11. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Линейная алгебра и основы математического анализа (под редакцией *А.В. Ефимова* и *Б.П. Демидовича*) – М.: Наука, любое издание после 1981.

10.3 Дополнительная литература

12. *Aleskerov F., Ersel H., Piontkovski D.,* Linear Algebra for Economists. Berlin—Heidelberg, Springer, 2011
13. *Александров П.С.* Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры. – М.: Наука, 1968.
14. *Ефимов Н.В.* Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Наука, (любое издание).
15. *Клетеник Д.В.* Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, (любое издание).
16. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1975.
17. *Погорелов А.В.* Геометрия. – М.: Наука, 1983.
18. *Скорняков Л.А.* Элементы линейной алгебры. Учебное пособие. – М.: Наука, 1980.
19. *Фаддеев Д.К., Соминский И.С.* Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Наука, 1977.
20. *Умнов А.Е.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра. – М.: МФТИ, 2006.
21. *Беклемишева Л.А., Беклемишев Д.В., Петрович А.Ю., Чубаров И.А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре.– 3-е изд. СПб.: Лань, 2008.
22. *Беклемишев* Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.– М.: Наука, Физматлит, 2000.
23. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я., Данко С.П.* Высшая математика в упражнениях и задачах. 7-е изд. Ч.I. – М.: Оникс, 2009.

10.4 Справочники, словари, энциклопедии

24. *Корн Г.А., Корн Т.М.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: «Наука», 1974.
25. *В.В.Воеводин, Вл.В.Воеводин*. Энциклопедия линейной алгебры. С. -Петербург: БХВ-Петербург. 2006.

10.5 Программные средства

Для успешного освоения дисциплины студенты могут самостоятельно использовать профессиональные пакеты программных средств Mathcad, MATLAB, Maple, Mathematica и др.

10.6 Дистанционная поддержка дисциплины

Предусмотрена электронная переписка со студентами.

11 Материально-техническое обеспечение дисциплины

Не предусмотрено.