



Правительство Российской Федерации

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
"Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"**

**Факультет экономических наук
Департамент статистики и анализа данных**

**Программа дисциплины
"Случайные процессы"**

для направления **38.03.01** «Экономика» подготовки бакалавра
Образовательная программа «Экономика»

Автор программы:

Панов В.А., PhD, доцент, upanov@hse.ru

Одобрена на заседании Департамента статистики и анализа данных «____»_____ 2017 г
Рук. департамента **Мхитарян В.С.**

Рекомендована секцией УМС [Введите название секции УМС] «____»_____ 2017 г
Председатель [Введите И.О. Фамилия]

Утверждена УС факультета Экономики «____»_____ 2017 г.

Ученый секретарь [Введите И.О. Фамилия] _____ [подпись]

Москва, 2017

Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения кафедры-разработчика программы.



1 Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов направления подготовки 38.03.01 «Экономика», изучающих дисциплину "Случайные процессы".

Программа разработана в соответствии с:

- Образовательным стандартом НИУ ВШЭ подготовки бакалавров по направлению 38.03.01 «Экономика»;
- Рабочих учебных планов НИУ ВШЭ подготовки бакалавров по направлению подготовки 38.03.01 «Экономика».

2 Цели освоения дисциплины

Цель данного курса – вооружить студентов теоретическими знаниями и практическими навыками, необходимыми для применения теории случайных процессов при исследовании сложных динамических систем в экономике.

Задачи:

1. изучение основных понятий теории случайных процессов;
2. знакомство с наиболее важными типами случайных процессов;
3. изучение различных свойств и характеристик процессов;
4. освоение методов описания и анализа сложных стохастических моделей;
5. освоение методов решения стохастических дифференциальных уравнений;
6. знакомство с методами стохастического интегрирования.

3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен:

- знать основные типы случайных процессов (процесс восстановления, пуассоновский процесс, Броуновское движение, гауссовские процессы, процессы Леви) и свойства этих процессов;
- освоить такие понятия как стационарность, эргодичность, непрерывность случайных процессов, а также элементы стохастического анализа – стохастическое интегрирование и решение стохастических дифференциальных уравнений;
- уметь выбирать модель и инструментарий теории случайных процессов, адекватные экономической задаче;
- уметь верно интерпретировать результаты, полученные при анализе экономических задач методами теории случайных процессов.

В результате освоения дисциплины студент осваивает следующие компетенции:

1. СК-3, СК-М3, способен к самостоятельному освоению новых методов исследования, изменению научного и научно-производственного профиля своей деятельности;



2. СК-6, СК-М6, способен анализировать, верифицировать, оценивать полноту информации в ходе профессиональной деятельности, при необходимости восполнять и синтезировать недостающую информацию и работать в условиях неопределенности;

3. ПК-4, ИК-М 3.2НИД_5.4, способен представлять результаты проведенного исследования научному сообществу в виде статьи или доклада;

4. ПК-9, ИК-М4.1_4.4_4.6_АД_5.4, способен находить данные, необходимые для анализа и проведения экономических расчетов, используя различные источники информации;

5. ПК-10, ИК-М4.4АД_5.4: способен работать с большими массивами разнообразной информации, составлять прогноз основных социально-экономических показателей деятельности предприятия, отрасли, региона и экономики в целом, в т.ч. используя современные информационно-компьютерные технологии;

4 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина относится к циклу дисциплин **профессиональный** и блоку дисциплин «По выбору», обеспечивающих профессиональную подготовку.

Данный курс является важным этапом в изучении методов стохастического анализа. Предполагается, что слушатели знакомы с основами теории вероятностей в объеме стандартного курса. Знание основ математической статистики не требуется, однако упрощает понимание данной дисциплины.

Курс даёт теоретическую основу для изучения других вероятностных дисциплин, таких как финансовая математика, стохастическое моделирование и теория скачкообразных процессов.

5 Тематический план учебной дисциплины

| № п/п | Раздел дисциплины (тема) | Неделя | Виды учебной рабо- ты | | Литература |
|----------|---|--------|--------------------------|--------------------------------|------------|
| | | | лекции | самосто- ятельная работа | |
| 1 | Основные понятия теории случайных процессов | 1 | 4 | 8 | 1-10 |
| 2 | Процессы восстановления | 2 | 4 | 8 | 2,3,5 |
| 3 | Однородные и неоднородные процессы Пуассона, составные пуассоновские процессы | 3,4 | 8 | 12 | 1,2,3 |
| 4 | Цепи Маркова | 5,6,7 | 12 | 16 | 2,4,10 |



| | | | | | |
|----|---|----------|----|-----|-----|
| 5 | Гауссовские процессы | 8 | 4 | 16 | 2,3 |
| 6 | Броуновское движение | 9 | 4 | 8 | 2 |
| 7 | Стационарность, непрерывность и эргодичность случайных процессов. | 10,11 | 8 | 10 | 2,3 |
| 8 | Спектральная плотность | 12,13 | 8 | 12 | 2,9 |
| 9 | Стохастическое интегрирование. Формула Ито. | 14,15,16 | 6 | 10 | 6 |
| 10 | Процессы с независимыми приращениями: аддитивные процессы и процессы Леви. Характеристическая экспонента. Мера Леви. Формула Леви-Хинчина | 17,18 | 6 | 16 | 1,8 |
| | Всего | | 64 | 116 | |



6 Формы контроля знаний студентов

| Тип кон- контроля | Форма кон- тrolя | 1 год | | Параметры |
|--------------------------|------------------------------|---------------------|--------------------|--|
| | | 1 модуль | 2 мо- дуль | |
| Теку- щий (неделя) | Контроль- ная работа | 8 неделя | | Аудиторная письменная работа (решение задач по темам 1-5), 80 минут |
| | Домашние задания | 2, 4, 6 не- дели | 10,11,12 недели | Домашние письменные работы, каждая со- стоит из 4 обязательных и 2 необязатель- ных задач |
| Итого- вый | Письмен- ный экза- мен | | 2 мо- дуль | Аудиторная письменная итоговая кон- трольная работа (теоретические вопросы и задания по всему курсу), 120 минут. |

6.1 Критерии оценки знаний, навыков

Контрольные работы, домашние задания, оцениваются по 10-балльной шкале. С определенными весами эти оценки, а также баллы за активность на семинарах, агрегируются в итоговую оценку (тоже в 10-балльной шкале).

Все элементы промежуточного контроля и направлены на понимание математических основ изучаемых методов, их диапазона применения, понимания численных результатов оценки моделей и умение практической работы с реальными данными.

6.2 Порядок формирования оценок по дисциплине

Для контроля знаний студентов предусмотрены следующие формы и методы отчётности:

1. одна промежуточная письменные контрольные работы;
2. устное общение в процессе чтения лекций и проведения семинаров;
3. домашние работы (после каждого семинара);
4. письменный экзамен: проводится в виде итоговой контрольной работы.

Итоговая оценка вычисляется по следующей формуле:

[Итоговая оценка] = 0.6 * [Оценка за итоговую к/р] + 0.4 * [Накопленная оценка],
где

[Накопленная оценка] = 0.5* [Оценка за промежуточную к/р] +0.5 * [Оценка за рабо-
ту в течение семестра, в том числе, за выполнение домашних заданий].

При выставлении оценки за работу в течение семестра учитывается активность на занятиях и качество выполнения домашних работ. В случае пропусков занятий в количестве 6 и более пар итоговая оценка уменьшается на 20%.



Пересдача проходит в письменной форме.

7 Материал Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

a) Базовые учебники

1. Cont, R. and Tankov, P. Financial modelling with jump processes. Chapman and Hall, 2003.
2. Gallager, R. Stochastic processes: theory for applications. Cambridge University Press, 2013.
3. Parzen E. Stochastic processes. SIAM, Philadelphia, 1999.

b) Дополнительная литература

4. Прохоров, А.В., Ушаков, В.Г., Ушаков, Н.Г. Задачи по теории вероятностей. Основные понятия, предельные теоремы, случайные процессы. Книжный Дом Университет, 2009.
5. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и её приложения, том 2. Москва: Мир, 1984.
6. Kuo, H.-H. Introduction to stochastic integration. Springer, 2006.
7. Koralov L. and Sinai, Y. Theory of probability and random es. Springer, Second ed., 2007.
8. Sato, K. – I. Levy processes and infinitely divisible distributions. Cambridge University Press, 1999.
9. Brockwell, P., and Davis, R. Introduction to time series and forecasting. Springer, 2016.
10. Suhov, Y. and Kelbert, M. Probability and statistics by example. Vol.2. Markov chains: a primer in random processes and their applications. Cambridge University press, 2008.



8 Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

8.1 Примерный вариант контрольной работы №1.

23 октября 2015 г.

Курс “Теория случайных процессов”.

Контрольная работа номер 1.

1. (4 балла) В русле реки лежит камень. В случайные моменты времени τ_1, τ_2, \dots камень передвигается на случайные расстояния Y_1, Y_2, \dots . Известно, что величины $\tau_1, (\tau_2 - \tau_1), (\tau_3 - \tau_2), \dots$ независимы и имеют экспоненциальное распределение с параметром λ , а величины Y_1, Y_2, \dots независимы и имеют Гамма-распределение с функцией плотности

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \cdot \mathbb{I}\{x > 0\},$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$. Предполагается, что случайные величины (τ_1, τ_2, \dots) независимы от (Y_1, Y_2, \dots) .

- (i) Какой тип имеет процесс X_t , представляющий собой суммарное расстояние, на которое передвинулся камень за время t ?
- (ii) Найдите $\mathbb{E}[X_t]$, $\mathbb{D}[X_t]$, $\mathbb{P}\{X_t = 0\}$, а также преобразование Лапласа процесса X_t .

Подсказка: $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$ для любого $x > 0$.

2. (3 балла.) Частица движется по прямой по целочисленным точкам $0, 1, \dots, n$. Из любой внутренней точки (то есть точки $1, 2, \dots, (n-1)$) частица передвигается с вероятностью $p \in (0, 1)$ на один шаг вправо и с вероятностью $(1-p)$ на один шаг влево. Кроме того, попадая в точки 0 и n , частица остаётся в них навсегда.

- (i) Выпишите матрицу переходных вероятностей за 1 шаг.
- (ii) Найдите классы эквивалентности этой цепи Маркова и определите типы состояний (существенные / несущественные, периодические / непериодические, возвратные / невозвратные).
- (iii) Найдите все стационарные распределения.



3. (3 балла.) Пусть ξ и η - 2 случайные величины. Известно, что η имеет симметричное распределение (то есть, $\mathbb{P}\{\eta > 0\} = \mathbb{P}\{\eta < 0\}$), и, кроме того, $\mathbb{P}\{\eta = 0\} = 0$. Найдите вероятность того, что траектории случайного процесса

$$X_t = \xi^2 + t(\eta + t), \quad t \geq 0,$$

возрастают.



8.2 Примерный вариант контрольной работы №2.

Курс “Теория случайных процессов”.

Контрольная работа номер 2.

1. (3 балла.) Рассмотрим случайный процесс $X_t = W_t^2$, где W_t - Броуновское движение.

- (i) Выясните, является ли процесс X_t гауссовским.
- (ii) Найдите математическое ожидание и ковариационную функцию процесса X_t .
- (iii) Выясните, является ли процесс X_t стационарным (в узком и широком смыслах).

2. (4 балла.) Вычислите дисперсии следующих интегралов:

$$(i) \int_0^1 t^2 dW_t, \quad (ii) \int_0^1 W_t^2 dt, \quad (iii) \int_0^1 W_t^2 dW_t.$$

3. (3 балла.) Про процесс Y_t известно, что

$$\mathbb{E}[Y_t] = \alpha + \beta t, \quad \text{cov}(Y_t, Y_{t+h}) = e^{-\lambda h}, \quad \forall t \geq 0, h \geq 0,$$

где $\lambda > 0$, α, β - некоторые константы. Определите, является ли процесс

$$X_t := Y_{t+1} - Y_t$$

- (i) стационарным в широком смысле;
- (ii) эргодическим.

Подсказка. При решении задач 1 и 2 может быть полезна формула для моментов нормального распределения:

$$\mathbb{E}[\xi^n] = \begin{cases} 0, & n - \text{нечётное}, \\ (n-1)!! & n - \text{чётное}, \end{cases}$$

где $\xi \sim N(0,1)$, и двойной факториал обозначает произведение всех нечётных чисел от 1 до n . В частности,

$$\mathbb{E}[\xi^4] = 3, \quad \mathbb{E}[\xi^6] = 15.$$

9 Материально-техническое обеспечение дисциплины

Большая (обязательно) доска в лекционном зале и компьютерный проектор.

Подпись автора _____

Панов В.А.