Правительство Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"

Факультет Мировой экономики и мировой политики

Программа дисциплины

Линейная алгебра

для направления 38.03.01 «Экономика» подготовки бакалавров

образовательная программа «Мировая экономика»

Авторы программы:
к.пед.н., доцент Салимова Альфия Фаизовна (asalimova@hse.ru)
к.т.н. Мячин Алексей Леонидович (amyachin@hse.ru)

Утверждена на заседании департамента математики
на факультета экономических наук «29» августа 2017 г.
Руководитель департамента Ф.Т. Алескеров

Рекомендована секцией УМС «___»____________ 20 г.
Председатель

Утверждена Ученым Советом факультета «___»_____________20 г.
Ученый секретарь

Москва, 2017

1 Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов. Курс предназначен для студентов по направлению 38.03.01 «Экономика», образовательная программа «Мировая экономика», подготовки бакалавра, изучающих дисциплину «Линейная алгебра».

Программа разработана в соответствии с:

- образовательным стандартом Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»;
- образовательной программой 38.03.01, направление «Экономика» подготовки академического бакалавра;
- рабочим учебным планом университета по направлению подготовки 38.03.01 «Экономика» образовательной программы «Мировая экономика», утвержденным в 2017г.

2 Цели освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины «Линейная алгебра» является:

- ознакомление студентов с основами линейной алгебры;
- формирование навыков работы с абстрактными понятиями линейной алгебры;
- знакомство с прикладными задачами дисциплины;
- обеспечение запросов других математических дисциплин;
- подготовка к изучению современных курсов по экономической теории.

3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате изучения дисциплины студент должен:

- знать формулировки основных понятий и теорем линейной алгебры, необходимые для дальнейшего изучения дисциплин, предусмотренных базовым и рабочим учебными планами;
- уметь интерпретировать основные понятия линейной алгебры на простых модельных примерах, применять методы дисциплины при решении задач, возникающих в других дисциплинах;
- владеть навыками применения современного инструментария дисциплины при решении задач, возникающих в других дисциплинах.

Изучение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Компетенция	Код по ФГОС / НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
Универсальная	УК-3	Способность решать проблемы в профессиональной деятельности на основе анализа и синтеза	Стандартные (лекционно-семинарские)

Компетенция	**Код по ФГОС / НИУ**	**Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)**	**Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции**
Универсальная	УК-5	Способность работать с информацией: находить, оценивать и использовать информацию из различных источников, необходимую для решения научных и профессиональных задач (в том числе на основе системного подхода)	Стандартные (лекционно-семинарские)
Профессиональная	ПК-7	Способность собрать и проанализировать исходные данные, необходимые для расчета экономических и социально-экономических показателей	Стандартные (лекционно-семинарские)
Профессиональная	ПК-11	Способность осуществлять сбор, анализ и обработку статистических данных, информации, научно-аналитических материалов, необходимых для решения поставленных экономических задач	Стандартные (лекционно-семинарские)
Профессиональная	ПК-12	Способность выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы	Стандартные (лекционно-семинарские)
Профессиональная	ПК-13	Способность на основе описания экономических процессов и явлений строить теоретические и эконометрические модели, анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты	Стандартные (лекционно-семинарские)
Профессиональная	ПК-19	Способность к презентации результатов аналитической и исследовательской деятельности	Стандартные (лекционно-семинарские)

4 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Линейная алгебра» относится к циклу математических и естественнонаучных дисциплин. Курс предназначен для студентов по направлению 38.03.01 «Экономика», специализация «Мировая экономика» подготовки бакалавра, читается в первом и втором модулях первого курса. От слушателей не требуется никаких предварительных знаний сверх программы по математике в объеме средней школы. Программа соответствует требованиям ФГОС. В данном курсе рассматриваются избранные разделы линейной алгебры, образующие элемент базового образования студентов по данной специальности. Программа предусматривает чтение лекций (44 часа) и проведение семинарских занятий (44 часа). Программой предусмотрена самостоятельная работа студента в объеме 140 часов, включающая в себя изучение теоретического материала, подготовку к семинарским занятиям, подготовку к промежуточным контрольным работам и к заключительному экзамену по данной дисциплине.

Изучение данной дисциплины базируется на следующих дисциплинах:

- математика в объеме средней школы.

Для освоения учебной дисциплины, студенты должны владеть следующими знаниями и компетенциями:

- знаниями основных понятий и теорем математики в объеме средней школы;
- навыками решения типовых задач математики в объеме средней школы.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

- теория вероятностей и математическая статистика;
- математический анализ;
- эконометрика;
- методы оптимальных решений;
- теория игр;
- математическая экономика;
- микроэкономика;
- макроэнономика.

5 Тематический план учебной дисциплины

№	*Название раздела, темы*	*Всего часов*	*Аудиторные часы*			*Самостоятельная работа*
			Лекции	*Семинары*	*Практич. занятия*	
	Первая часть курса:					
1.	Векторы, матрицы, определители	32	6	6		20
2.	Системы линейных уравнений	32	6	6		20
3.	Линейные пространства и линейные отображения	56	12	12		32
4.	Квадратичные формы и их матрицы	20	6	4		10
5.	Линейное программирование	16	4	4		8
	Итого по первой части курса	**156**	**34**	**32**		**90**
	Вторая часть курса:					
6.	Множества, отображения	20	4	4		12
7.	Введение в логику	16	2	2		14
8.	Комбинаторика	20	2	4		12
9.	Основы теории графов	16	2	2		12
	Итого по второй части курса:	**72**	**10**	**12**		**50**
	Итого:	228	44	44	0	140

6 Формы контроля знаний студентов

Тип контроля	*Форма контроля*	*1 год*				
		1	*2*	*3*	*4*	
Текущий	**Контрольные работы**	*	*			Письменная работа 80 минут, проводится в первом и втором модулях
	Контрольное домашнее задание	*				Письменная работа. Задание выдается на второй-третьей неделе 1 модуля. Работа сдается на седьмой неделе 1 модуля
Итоговый	**Экзамен**		*			Письменная экзаменационная работа 120 минут

6.1 Критерии оценки знаний, навыков

Контроль знаний осуществляется в формах текущего и итогового контроля.

Текущий контроль включает контрольные работы №1, №2, которые проводятся в первом, втором модулях соответственно, их продолжительность составляет 80 минут, а также домашнюю контрольную работу, проводимую в первом модуле. Текущий контроль также включает оценку аудиторной работы студентов, проверку самостоятельных аудиторных работ, проверку наличия и качества выполнения всех домашних заданий.

Итоговый контроль осуществляется в форме письменной экзаменационной работы, состоящей из двух частей и имеющей продолжительность 120 минут.

Оценки по всем формам текущего и итогового контроля выставляются по 10-балльной шкале.

6.2 Порядок формирования оценок по дисциплине

Накопленная оценка за первую часть курса (1-2 модули, элементы линейной алгебры) выставляется по следующей формуле:

$$O_{накопл.1} = 0,4 \cdot O_{д.к.р.} + 0,5 \cdot O_{к.р.2} + 0,1 \cdot O_{д.з.1},$$

здесь $O_{д.к.р.}$– результат выполнения домашней контрольной работы в первом модуле по первой части курса, $O_{к.р.2}$ – результат выполнения контрольной работы по первой части курса во втором модуле, $O_{д.з.1}$ – средневзвешенная оценка за выполнение домашних заданий к каждому семинарскому занятию в 1-2 модулях, кроме первого занятия в каждом модуле. Оценки $O_{д.к.р.}$, $O_{к.р.2}$ выставляются в 100-балльной системе, а затем переводятся в 10-балльную систему (без округлений). Оценка $O_{д.з.1}$ выставляется в 10-балльной системе. Оценка $O_{накопл.1}$ не округляется.

Накопленная оценка за вторую часть курса (1 модуль, элементы дискретной математики) выставляется по следующей формуле:

$$O_{накопл.2} = O_{к.р.1},$$

здесь $O_{к.р.1}$ – результат выполнения контрольной работы в первом модуле по второй части курса. Оценка $O_{к.р.\ 1}$ выставляются в 100-балльной системе, а затем переводится в 10-балльную систему (без округлений). Оценка $O_{накопл.2}$ не округляется.

Общая накопленная оценка за весь курс формируется по формуле:

$$O_{накопл.} = 0{,}75 \cdot O_{накопл.1} + 0{,}25 \cdot O_{накопл.2}.$$

Оценка $O_{накопл.}$ округляется до целого числа по правилам арифметики округления.

Экзаменационная работа состоит из двух частей. Первая часть курса (элементы линейной алгебры) оценивается из 75 баллов (в 100-балльной системе), вторая часть (элементы дискретной математики) оценивается из 25 баллов (в 100-балльной системе). Эти оценки складываются, в результате чего получается экзаменационная оценка в 100-балльной системе. Она переводится в 10-балльную оценку и округляется до целого числа по правилам арифметики округления.

Итоговая оценка за курс выставляется по следующей формуле:

$$O_{итог} = 0{,}7 \cdot O_{экз.} + 0{,}3 \cdot O_{накопл}.$$

Способ округления итоговой оценки производится по правилам арифметики округления.

Данная программа не предусматривает возможность пересдачи неудовлетворительных оценок, полученных за любую из форм текущего контроля, а также возможность компенсировать оценки за контрольные и домашние контрольные работы, не полученные вследствие пропуска семинарского занятия по любой причине. В этом случае за соответствующую форму текущего контроля студенту выставляется 0 баллов.

Пропуск каждого семинарского занятия по неуважительной причине приводит к снижению накопленной оценки на 1 балл, вплоть до 0 баллов.

Перевод в 5-балльную шкалу осуществляется по правилу:

Оценка по 10-балльной шкале	Оценка по 5-балльной шкале
0	неудовлетворительно
1	
2	
3	
4	удовлетворительно
5	
6	хорошо
7	
8	отлично
9	
10	

7 Содержание дисциплины

Часть 1 (элементы линейной алгебры, изучается в 1-2 модулях)

Тема I. **Векторы, матрицы, определители**

Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Геометрическая интерпретация решений этих систем. Экономическая интерпретация: модель равновесия.

Матрицы. Виды матриц. Понятие вектора как упорядоченного набора чисел. Линейные операции над векторами и матрицами. Свойства арифметических операций над матрицами. Умножение матриц. Транспонирование матриц. Линейная зависимость и линейная независимость векторов. Ранг матрицы как максимальное количество линейно независимых строк. Применение матриц к решению экономических задач. Задача об определении затрат и общей стоимости сырья, необходимых для планового выпуска продукции.

Определители квадратных матриц второго и третьего порядков. Миноры, алгебраические дополнения. Определитель n–го порядка, его свойства и способы вычисления. Определитель транспонированной матрицы. Определитель произведения двух матриц.

Обратная матрица. Свойства обратной матрицы и способы ее нахождения.

Геометрические векторы на плоскости и в трехмерном пространстве. Коллинеарность и компланарность векторов. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов, их выражение в координатной форме. Геометрические приложения.

Тема II. **Системы линейных уравнений**

Правило Крамера для систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными, трех линейных уравнений с тремя неизвестными.

Матрица и расширенная матрица системы линейных уравнений. Элементарные преобразования матриц. Приведение матрицы к ступенчатому виду. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли о совместности системы линейных уравнений. Структура множества решений неоднородной системы линейных уравнений. Решение задач с экономическим содержанием.

Системы линейных уравнений в матричной форме. Решение матричных уравнений. Задача балансового анализа (модель Леонтьева). Матрица прямых затрат. Матрица полных затрат. Продуктивная матрица.

Тема III. **Линейные пространства и линейные отображения**

Понятие линейного пространства. Вектор как элемент линейного пространства. Базис линейного конечномерного пространства. Координаты вектора в базисе. Размерность линейного пространства. Матрица перехода от старого базиса к новому. Понятие линейного подпространства линейного пространства.

Понятие линейного отображения линейных пространств. Матрица линейного отображения. Ядро и образ линейного отображения и их размерности. Преобразование матрицы линейного отображения при изменении базиса.

Собственные значения матрицы линейного отображения и собственные векторы. Характеристический многочлен и характеристическое уравнение. Приведение матрицы линейного отображения к диагональному виду с помощью перехода к базису из собственных векторов. Модель международной торговли.

Понятие евклидова пространства. Неравенство Коши-Буняковского. Матрица Грама. Ортогональный и ортонормированный базис. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

***Тема IV.* Квадратичные формы и их матрицы**

Понятие квадратичной формы. Матрица квадратичной формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы. Закон инерции для квадратичных форм.

***Тема V.* Линейное программирование**

Задача об использовании ресурсов в производстве. Выпуклые множества. Понятие целевой функции. Допустимые и оптимальные решения. Транспортная задача.

Элементы теории двойственности. Связь исходных и двойственных задач. Теоремы двойственности. Экономическая интерпретация двойственных переменных. Основная теорема двойственности, критерий оптимальности допустимых решений.

Обобщение метода Леонтьева. Многофакторное производство и линейное программирование.

Часть 2 (элементы дискретной математики, изучается в 1 модуле)

***Тема VI.* Множества и отображения**

Понятие множества. Примеры множеств. Задание множеств перечислением элементов. Задание множеств описанием свойств элементов. Задание множества с помощью логических утверждений (высказываний). Недопустимые логические высказывания. Парадокс Рассела. Универсальное множество. Подмножество.

Операции над множествами: объединение, пересечение, разность, симметрическая разность множеств, дополнение множества. Свойства операций над множествами: идемпотентность дополнения, законы де Моргана, преобразование формул с множествами.

Понятие разбиения множества. Разбиение конечного множества, классы разбиения.

Декартово произведение множеств. Мощность множества, конечные и бесконечные множества. Мощность объединения и пересечения конечных множеств.

Отображения. Общее понятие отображения и функции. Область определения и область значений отображения. Принцип Дирихле.

***Тема VII.* Введение в логику**

Функции алгебры логики. Способы задания логический функций. Суперпозиция функции. Формулы над системой логических функций или их суперпозиций.

Булева алгебра. Разложение функций по переменным. Булева алгебра функций и эквивалентные преобразования в ней. Совершенные конъюктивные и дизъюктивные формы.

***Тема VIII.* Комбинаторика**

Предмет комбинаторики. Правило суммы и произведения. Принцип включения и исключения.

Основные комбинаторные величины и их свойства. Формулы для k-размещений. Перестановки, сочетания без повторений и с повторениями.

Биномиальные коэффициенты и соотношения для них. Примеры решаемых с их помощью комбинаторных задач.

***Тема IX.* Основы теории графов**

Основные определения: неориентированные и ориентированные графы, мультиграфы и кратные ребра. Смежность и инцидентность в графах. Локальные степени вершин. Теорема Эйлера о сумме степеней всех вершин графа.

Графы и бинарные отношения. Свойства бинарных отношений и соответствующих им графов. Матрица смежности графа. Специальные классы бинарных отношений.

Понятие гомоморфизма графов. Примеры. Изоморфизм графов. Свойства графа, сохраняющиеся при гомоморфизмах и изоморфизмах.

Пути, циклы, цепи, простые цепи и простые циклы в неориентированных графах. Связность графа, компоненты связности графа.

Двудольные графы. Циклы в двудольных графах (теорема Кенига).

Виды связности в простых и ориентированных графах: сильная связность, односторонняя связность. Компоненты связности и сильной связности графа и ориентированного графа.

Задачи о цепях: эйлеровы циклы, гамильтоновы циклы. Эйлеровы и гамильтоновы графы. Критерий Эйлера о наличии в графе эйлерова цикла. Достаточные условия гамильтоновости графа: теорема Дирака.

8 Образовательные технологии

На лекционных занятиях предполагается использование мультимедийного оборудования. На семинарских занятиях, а также при выполнении домашних заданий, по усмотрению преподавателя, проводящего семинарские занятия, допускается решение задач с обращением к информационно-коммуникативным технологиям обучения. В частности, возможно обращение на математический сервер с сайта Academia.XXI, использование материалов, размещенных в среде LMS, обращение к математическим пакетам. Часть предложенной в программе учебной литературы может использоваться в электронном виде.

9 Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

9.1 Примеры заданий промежуточного /итогового контроля

Домашняя контрольная работа (1 модуль, типовой вариант)

1. Решите уравнение относительно матрицы X:

$$A^T \cdot X \cdot B = C^T, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 14 & 9 \\ 16 & 10 \end{pmatrix}.$$

2. Решите уравнения:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \ \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ x+6 & x+7 & x+8 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Определите, при каких значениях параметров a и b система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = b, \\ 5x - 8y + 9z = 3, \\ 2x + y + az = -1 \end{cases}$$

а) имеет единственное решение;

б) не имеет решений;

в) имеет бесконечно много решений.

4. Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

5. Методом присоединенной матрицы найдите матрицы, обратные данным:

C=$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; D=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

Проверьте справедливость следующих равенств:

а) $(CD)^{-1} = D^{-1} \cdot C^{-1}$;

б) $(C^{-1})^T = (C^T)^{-1}$;

в) $(D^{-1})^T = (D^T)^{-1}$.

6. Является ли следующая система векторов линейно зависимой или линейно независмой: $\boldsymbol{a} = (2;\ -3;\ 1)$; $\boldsymbol{b} = (3;\ -1;\ 5)$; $\boldsymbol{c} = (1;\ -4;\ 3)$?

7. В некотором базисе пространства R^3 даны векторы $\boldsymbol{e_1} = (1;\ 2;\ -1)$; $\boldsymbol{e_2} = (0;\ 1;\ 2)$; $\boldsymbol{e_3} = (5;\ -2;\ 1)$ и $\boldsymbol{x} = (4;\ 3;\ -3)$. Докажите, что векторы $\boldsymbol{e_1}$; $\boldsymbol{e_2}$; $\boldsymbol{e_3}$ образуют базис в R^3 и найдите координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в этом базисе.

8. Определите матрицу перехода от базиса $\boldsymbol{a_1} = (1;\ 2)$; $\boldsymbol{a_2} = (3;\ 5)$ к базису $\boldsymbol{b_1} = (-1; 3)$; $\boldsymbol{b_2} = (4;\ 6)$. Координаты вектора $\boldsymbol{x} = (6;\ 7)$ заданы в базисе $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}$. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}$.

9. Найдите размерность и базис линейной оболочки векторов $\boldsymbol{a_1} = (1;\ -1;\ 2; 1)$; $\boldsymbol{a_2} = (1;\ 2;\ 1; -1)$; $\boldsymbol{a_3} = (0;\ 3;\ -1; -2)$; $\boldsymbol{a_4} = (3;\ 3;\ 4; -1)$; $\boldsymbol{a_5} = (1;\ -4;\ 3; 3)$; в пространстве R^4. Выразите небазисные векторы через базисные.

10. Подпространство является линейной оболочкой векторов

$$\boldsymbol{a_1} = (1;\ 2;\ 3; -4); \boldsymbol{a_2} = (2;\ 3;\ -4; 1);$$
$$\boldsymbol{a_3} = (2;\ -5;\ 8; -3);\ \ \boldsymbol{a_4}(5;\ 26;\ -9; -12);\ \boldsymbol{a_5} = (3;\ -4;\ 1; 2).$$

Найдите уравнения, определяющие подпространство.

Контрольная работа № 1 (1 модуль, типовой вариант)

1. Написать обратное утверждение к следующей фразе: “Пария товара пришла с опозданием. Вся продукция не имеет сертификата безопасности ЕС или РФ”.

2. На мишени можно выбить от 0 до 11 очков. Известно, что, в серии из 7 выстрелов, по меньшей мере, дважды было выбито одинаковое количество очков. Сколько таких различных серий существует?

3. Сколько существует возможных способов рассадить шестерых разных хищников по 10 тумбам так, чтобы львица Артемида не сидела на центральной тумбе.

4. Привести пример графа или доказать, что такого не существует, степени вершин которого равны: а) 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4; б) 1, 1, 3, 3, 3, 3, 4.

5. A={1, M, 3, К, 4, 5}, B={3, 4, 5, 6}, C={1, 3, К, 7, 9, 6}, D={L, К, 4, 5, 6} . Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна.

6. Контракт может быть расторгнут в одностороннем порядке в случае изменения курса рубля более, чем на 5% относительно доллара или евро, а также понижения суверенного рейтинга страны не менее чем двумя рейтинговыми агентствами большой тройки. Сформулировать это условие на языке множеств. Построить диаграмму Эйлера-Венна.

7. Доказать методом математической индукции:

a. $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^3 \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$T_n = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + (n-1)\cdot n = \dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$

Контрольная работа № 2 (2 модуль, типовой вариант)

1. Докажите линейность оператора $A: R^3 \to R^3$, если $Ax = (4x_1 - 2x_2; 3x_3;\ x_1 + 2x_2 + 3x_3)$. Составьте его матрицу в данном базисе. Имеет ли оператор Ax обратный? Если да, то укажите его матрицу и запишите координаты $A^{-1}x$.
2. Составьте матрицу линейного оператора проецирования геометрических векторов из R^3 на плоскость $x + y = 0$ в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ и найдите базисы образа и ядра этого оператора.
3. Найдите матрицу линейного отображения, переводящего векторы $\boldsymbol{a_1} = (-2;\ 1;\ -1)$, $\boldsymbol{a_2} = (1;\ -1;\ 3)$, $\boldsymbol{a_3} = (1;\ 2;\ -1)$ в векторы $\boldsymbol{b_1} = (3;\ 4)$, $\boldsymbol{b_2} = (-2;\ 1)$, $\boldsymbol{b_3} = (1;\ 5)$.
4. Найдите матрицу перехода от базиса $\boldsymbol{e_1};\ \boldsymbol{e_2};\ \boldsymbol{e_3}$ к базису $\boldsymbol{f_1};\ \boldsymbol{f_2};\ \boldsymbol{f_3}$ в пространстве R^3 и определите координаты вектора $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f_1} + \boldsymbol{f_2} - 4\boldsymbol{f_3}$ в базисе $\boldsymbol{e_1};\ \boldsymbol{e_2};\ \boldsymbol{e_3}$, если $\boldsymbol{e_1} = (1;\ 1;\ 2)$; $\boldsymbol{e_2} = (3;\ 2;\ 1)$; $\boldsymbol{e_3} = (0;\ 0;\ 1)$, $\boldsymbol{f_1} = (-1;\ 2;\ 0)$; $\boldsymbol{f_2} = (2;\ 1;\ 2)$; $\boldsymbol{f_3} = (0;\ 2;\ 1)$.
5. В некотором базисе $\boldsymbol{e_1};\ \boldsymbol{e_2};\ \boldsymbol{e_3}$ задана матрица линейного оператора $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу этого оператора A_f в базисе
$$\boldsymbol{f_1} = \boldsymbol{e_1};\ \boldsymbol{f_2} = \boldsymbol{e_1} + 2\boldsymbol{e_2};\ \boldsymbol{f_3} = \boldsymbol{e_1} + 2\boldsymbol{e_2} + 3\boldsymbol{e_3}.$$
6. В евклидовом пространстве R^4 задано подпространство H как линейная оболочка векторов $\boldsymbol{a_1} = (1;\ 2;\ 1;\ -3)$, $\boldsymbol{a_2} = (-1; 2;\ 3; 4)$. Найдите базис орногонального дополнения $H^{\perp}$. Для вектора $\boldsymbol{x} = (2;\ 1;\ 1;\ 0)$ найдите его ортогональную проекцию на подпространство H и ортогональную составляющую относительно H.
7. В евклидовом пространстве R^3 даны векторы $\boldsymbol{a_1} = (1;\ -1;\ 2)$, $\boldsymbol{a_2} = (1;\ 1;\ 1)$, $\boldsymbol{a_3} = (1;\ 0;\ 1)$. Найдите матрицу Грама этой системы векторов и с ее помощью докажите, что векторы $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$ образуют базис в R^3. Вычислите скалярное произведение векторов $\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{a_1} - \boldsymbol{a_2} + 4\boldsymbol{a_3}$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a_1} - \boldsymbol{a_2} + 2\boldsymbol{a_3}$ двумя способами: через их координаты в стандартном базисе и в базисе $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$ с помощью матрицы Грама.
8. Изобразите линию $4x^2 + 8x - 6y = 2$.
9. Найдите орт линии пересечения координатной плоскости Oyz с плоскостью, проходящей через точки $A(1;\ 1;\ 0)$, $B(1;\ 0;\ 3)$, $C(4;\ 4;\ 3)$.
10. Приведите квадратичную форму $f(x_1;\ x_2;\ x_3)$ к каноническому виду любым удобным способом, если $f(x_1;\ x_2;\ x_3) = 4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 - 4x_3^2$.

Экзаменационная работа по первой части курса (за 1-2 модули, типовой вариант)

1. Решите неравенство $\begin{vmatrix} 2 & x+1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & x+7 & x+3 \end{vmatrix} > 0.$
2. Решите уравнение относительно матрицы X:
$$XA - B = 2A, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
3. Найдите все значения x, при каждом из которых векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ линейно зависимы: $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x-1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x^2-3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} x+1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
4. Линейный оператор $A: R^5 \to R^3$ в некотором базисе задан матрицей
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & 9 & 5 \\ 1 & 3 & -5 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Найдите образ, ядро, ранг и дефект оператора.

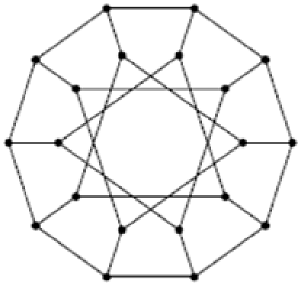
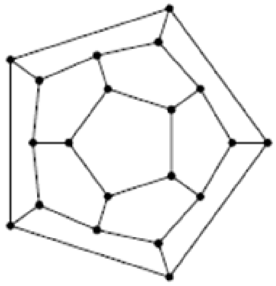
5. Найдите базис из собственных векторов линейного оператора $A: R^3 \to R^3$, заданного в некотором базисе матрицей A, запишите матрицу этого оператора в найденном базисе, если $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
6. В евклидовом пространстве R^4 задано подпространство H как линейная оболочка векторов $\boldsymbol{a_1} = (1;\ 2;\ 1;\ -3)$, $\boldsymbol{a_2} = (-1; 2;\ 3; 4)$. Найдите базис орногонального дополнения $H^{\perp}$. Для вектора $\boldsymbol{x} = (2;\ 1;\ 1;\ 0)$ найдите его ортогональную проекцию на подпространство H и ортогональную составляющую относительно H.
7. Матрица Грама в базисе $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ имеет вид $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите длины векторов $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2} - 2\boldsymbol{e_3}$, $\boldsymbol{y} = 2\boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_3}$ и угол между ними. Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}$ и объем пирамиды с треугольным основанием, построенной на векторах $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$.
8. Известны координаты вектора $\boldsymbol{x} = (7; 2)$ в старом базисе $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$. Найдите координаты этого вектора в новом базисе $\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}$, если $\boldsymbol{f_1} = 4\boldsymbol{e_1} + 5\boldsymbol{e_2}$; $\boldsymbol{f_2} = \boldsymbol{e_1} - \boldsymbol{e_2}$.
9. Используя критерий Сильвестра, исследуйте квадратичную форму $f(x_1;\ x_2;\ x_3) = 2x_1^2 + mx_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 6x_1x_3$ на знакоопределенность в зависимости от параметра m.

Экзаменационная работа по второй части курса (за 1 модуль, типовой вариант)

1. Множества А, В, С содержат по 9, 11, 13 элементов, их попарные пересечения – по 10, 8 и 9 элементов. Сколько элементов может содержать их объединение.

2. На конференции нужно организовать двусторонние встречи между послами 13 государств. По правилам каждый посол должен провести одинаковое количество встреч. Сколько встреч может провести каждый посол, если послы Бурундии и Дибурии категорически не желают встречаться? (Ответ обосновать).

3. Изоморфны ли графы? Если нет – доказать, если да – указать изоморфизм

4. Упростить логическое выражение $x_1x_2x_3 \vee \overline{x_1}(x_2 \vee x_2x_4)\overline{(x_1(x_2 \vee \overline{x_3}) \vee x_3x_4}$.

10 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

10.1 Базовый учебник

[1] **Беклемишев Д.В.** Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М. ФИЗМАТЛИТ, 2008.-312с. *А также любое издание, начиная с 2000.*

[2] **Бурмистрова Е.Б, Лобанов С.Г.** Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии.– М.: Изд-во ГУ-ВШЭ, 1998.-216с.

[3] **Шевцов Г.С.** Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты. – М.: Финансы и статистика, 2003.

[4] **Хаггарти Р.** Дискретная математика для программистов. 2-е изд. – М.: Техносфера, 2005.

10.2 Основная литература

[1] **Алескеров Ф.Т., Хабина Э.Л., Шварц Д.А.** Бинарные отношения, графы и коллективные решения. – М.: Издательский дом ГУ ВШЭ, 2006.

[2] **Беклемишев Д.В.** Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М. ФИЗМАТЛИТ, 2008.-312с. *А также любое издание, начиная с 2000.*

[3] **Бурмистрова Е.Б, Лобанов С.Г.** Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии.– М.: Изд-во ГУ-ВШЭ, 1998.-216с.

[4] **Кузнецов О.П.** Дискретная математика для инженера, идз.6. – Спб. – 2009.

10.3 Основные задачники

[1] **Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А.** Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре.– М.: Физматлит, 2001.-394с.

[2] **Проскуряков И. В**. Сборник задач по линейной алгебре. — М.: БИНОМ. Лаборатория Знаний, 2005. – 383 с

10.4 Дополнительная литература

[1] **Кулешов С.А., Салимова А.Ф., Ставцев С.Л.** Аналитическая геометрия.– М.: Издв-во «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», 2009.-379с.

[2] **Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А**. *Задачи и упражнения по дискретной математике*. Изд. 3-е. — М.: Физматлит, 2005. – 416 с.

[3] **Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А.** Комбинаторика. – М.: ФМА, МЦМНО, 2006.

[4] **Берж К.** Теория графов и ее применения. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1964.

[5] **Оре О.** Теория графов. – М.: Наука, 1980.

[6] **Лавров И.А., Максимова Л.Л.** Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – М: Физматлит. – 2001.