

Правительство Российской Федерации

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"**

Факультет Математики

**Программа дисциплины Спецкурс «Geometric Introduction to Algebraic Ge-
ometry II»**

для направления 010100.62 «Математика» подготовки бакалавра
и направления 010100.68 «Математика» подготовки магистра

Автор программы:

Alexey Gorodentsev, к.ф.-м.н, доцент, gorod@itep.ru

Рекомендована секцией УМС по математике «__»_____ 2013 г.

Председатель С.М. Хорошкин

Утверждена УС факультета математики «__»_____ 2013 г.

Ученый секретарь Ю.М. Бурман _____

Москва, 2013

*Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями универ-
ситета и другими вузами без разрешения кафедры-разработчика программы.*



1 Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов направления 010100.62 «Математика» подготовки бакалавра, направления 010100.68 «Математика» подготовки магистра.

Программа разработана в соответствии с:

- ОС НИУ ВШЭ;
- Рабочими учебными планами университета: по направлению 010100.62 «Математика» подготовки бакалавра и по направлению 010100.68 «Математика» подготовки магистра, специализации Математика, утвержденными в 2013 г.

2 The goals of mastering the subject

The goals of mastering the subject «Geometric Introduction to Algebraic Geometry II» are:

- ▲ explanation of modern algebraic-geometric approach to infinitesimal notions coming from differential geometry, such as: vector fields, differential forms, tangent cones, and blow-ups
- ▲ brief introduction to the toric varieties
- ▲ geometric introduction to the intersection theory of algebraic cycles and other aspects of the enumerative geometry

3 Competencies of a student which are formed by mastering the subject

As a result of mastering the subject the student should:

- understand different algebraic and geometric definitions of tangent vectors, tangent cones, differentials, conormal sheaves of subvarieties, blow-ups of subvarieties and got some experience who to apply these notions in birational geometry
- be able to make precise computations on the toric varieties: describe combinatorically the basic geometric properties (smoothness, compactness, etc), the Picard group, some cohomology spaces of some vector bundles (spaces of vector fields and differential forms, global sections of line bundles etc), intrinsic homogeneous coordinates
- learn the Schubert calculus (intersection theory of cycles on a grassmannian) and got some experience how to apply it to problems of enumerative geometry
- learn basic properties of algebraic cycles, equivalences between them, and the Chow rings



В результате освоения дисциплины студент осваивает следующие компетенции:

Компетенция	Код по ФГОС/ НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
умение воспринимать математические тексты в форме устных сообщений	ПК-5 ИК-М2.1 (МА)	Способен воспринимать и интерпретировать математические тексты в форме устных сообщений разного уровня строгости и детализованности, в т.ч. содержащие легко устранимые ошибки	Формируется при работе на семинаре в ходе восприятия докладов других студентов и последующего обсуждения этих докладов
умение выступать с устными сообщениями на тему собственных и чужих исследований	ПК-6 ИК-М2.2/ 3.1/3.2(МА)	Способен выступить с докладом (устным сообщением) с изложением задач и результатов из области специализации студента (в т.ч. собственных)	Формируется в ходе подготовки доклада, выступления на семинаре и последующего обсуждения
освоение специальной предметной терминологии на русском и английском языках	ПК-8 ИК-М2.4.1/ 2.4.2 (МА)	Способен освоить специальную предметную терминологию на русском и английском языках для целей профессионального и научного общения	Формируется в ходе всей работы по дисциплине — прослушивания и обсуждения (на английском языке) докладов других студентов, подготовки и выступления (на английском языке) с докладом на семинаре
умение публично описать собственные научные результаты и результаты других учёных	ПК-9 ИК-М2.5.1/ 2.5.2 (МА)	Способен публично описать собственные научные результаты и результаты других учёных из области специализации студента	Формируется в ходе подготовки доклада, выступления на семинаре и последующего обсуждения
умение найти научную информацию и адаптировать её для устного изложения в докладе	ПК-10 ИК-М4.1/ 4.2/4.6 (МА)	Способен находить необходимую научную информацию (в т.ч. с использованием электронных библиотечных ресурсов и баз данных) и адаптировать её для устного изложения в докладе на семинаре	Формируется в ходе подготовки доклада на семинаре

4 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина относится к циклу специальных дисциплин и блоку дисциплин по выбору.



5 Thematic plan of the subject

№	Title of the section	Total hours	Class hours			Self-guided study
			Lectures	Seminars	Practical classes	
1	Infinitesimal aspects and smoothness	30	15			15
2	Toric varieties	30	10			15
3	Elements of the intersection theory	30	15			20
		90	40			50

6 Формы контроля знаний студентов

Тип контроля	Форма контроля	1 модуль	2 модуль	письменная работа, 80 мин.
Текущий (неделя)	Контрольная работа	9		письменная работа, 80 мин.
Итоговый	Зачет		v	письменная работа, 240 мин

6.1 Критерии оценки знаний, навыков

На зачете студент должен продемонстрировать хорошее умение применять полученные в курсе знания к конкретным геометрическим задачам, возникающим в теории пересечений, в торической геометрии, в бирациональной геометрии и в алгебраической теории векторных полей и дифференциальных форм. Оценки по всем формам текущего контроля выставляются по 10-ти балльной шкале.

7 Content of the subject

1. Section 1. Infinitesimal aspects and smoothness

№	Topic	Total hours	Lectures	Seminars	Self-guided study
1.	Conormal sheaf and normal cone of a subscheme. Tangent and cotangent sheaves. Derivations and differentials.	8	4		4
2.	Blow up. Generic smoothness.	6	3		3
3.	Smooth morphisms. Local properties of smooth points	8	4		4
4.	Etale morphisms. Degree of a finite morphism. Characterization of closed embeddings.	8	4		4
	Total:	30	15		15



Suggested bibliography:

V.I. Danilov. Algebraic Manifolds and Schemes (in: Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 23), Springer-Verlag, 1996.

J. Harris. Algebraic Geometry: A First Course (Graduate Texts in Mathematics, v. 133). Springer-Verlag.

I. R. Shafarevich, Basic algebraic geometry, Vol 1, Springer-Verlag 1994.

2. Section 2. Toric varieties

№	Topic	Total hours	Lectures	Seminars	Self-guided study
5.	Definitions and examples. Normality. Smoothness. Compactness. Blow-ups.	10	3		5
6.	Vector bundles, the Picard group, homogeneous coordinates, (co)tangent bundle	10	3		5
7.	Cohomologies of line bundles	10	4		5
Total:		30	10		15

Suggested bibliography:

Fulton W. Introduction to toric varieties. Princeton, 1993

Danilov. Algebraic Manifolds and Schemes (in: Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 23), Springer-Verlag, 1996.

V.I. Danilov. Algebraic Manifolds and Schemes (in: Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 23), Springer-Verlag, 1996.

V.I. Danilov. Cohomology of algebraic varieties. (in: Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 35), Springer-Verlag, 1996.

3. Section 3. Elements of the intersection theory

№	Topic	Total hours	Lectures	Seminars	Self-guided study
8.	Intersection multiplicities. Deformation to the normal cone.	8	5		6
9.	The Schubert calculus.	12	6		8
10.	Algebraic cycles and Chow rings	10	4		6
Total:		30	15		20

Suggested bibliography:

Fulton W. Intersection theory. Springer, 1998

Fulton W. Young tableau, representation theory and geometry. CUP, 1997

V.I. Danilov. Algebraic Manifolds and Schemes (in: Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 23), Springer-Verlag, 1996.



J. Harris. Algebraic Geometry: A First Course (Graduate Texts in Mathematics, v. 133). Springer-Verlag.

I. R. Shafarevich, Basic algebraic geometry, Vol 2, Springer-Verlag 1994.

8 Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

8.1 Тематика заданий текущего контроля

Примерные вопросы для контрольной работы

1. Construct a regular surjection $X \rightarrow P_1$ whose all fibers are isomorphic to P_1 except for one fiber that is isomorphic to $P_1 \times P_1$.
2. Find all singular points of the Steiner surface $x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_0^2 + x_0^2 x_1^2 + x_0 x_1 x_2 x_3$.
3. Prove that the Pluecker relations span the ideal of grassmannian $Gr(k, V)$ inside $P(\Lambda^k V)$.
4. Show that smooth projective variety of dimension k admits a closed embedding to P^{2k+1} .

8.2 Вопросы для оценки качества освоения дисциплины

1. Prove that the dimension of a variety equals the dimension of the tangent cone to this variety at each point of the variety.
2. Describe the tangent bundle to grassmannian.
3. Prove that the smooth points of algebraic variety form an open dense set.
4. Prove that any finite injective non-ramified morphism is a closed embedding.
5. Prove that any smooth point of an algebraic variety has a factorial neighborhood.
6. What is the Cohen–Macaulay property of a local ring?
7. What are the combinatorial conditions on a fan that are equivalent to the following properties of the toric variety: (1) smoothness (2) compactness (3) normality
8. Describe the Picard group of a toric variety.
9. Describe the intrinsic homogeneous coordinates on a toric variety presented via a fan.
10. How to compute the space of global sections of a line bundle on a toric variety.
11. What is the deformation to the normal cone?
12. What is the Gysin homomorphism of algebraic cycles?
13. What is the Chow ring?
14. Explain the Pieri formulas for the intersections of the Schubert cycles.
15. Describe the Chow ring of grassmannian.

9 Порядок формирования оценок по дисциплине

Оценка за текущий, промежуточный и итоговый контроль выставляется по 10 балльной шкале.

Результирующая оценка за итоговый контроль складывается из результатов накопленной результирующей оценки за текущий контроль, удельный вес которой составляет $k_1 = 0,5$ и оценки за зачет, удельный вес $k_2 = 0,5$.

$$O_{\text{итоговый}} = 0,5 * O_{\text{текущий}} + 0,5 * O_{\text{зачет}}$$

Способ округления накопленной оценки промежуточного (итогового) контроля в форме зачета/экзамена в пользу студента.

Студент может получить возможность пересдать низкие результаты за текущий контроль.



В диплом ставится оценка за итоговый контроль, которая является результирующей оценкой по учебной дисциплине.

10 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

10.1 Базовый учебник

Нет. Должны быть обеспечены ридеры.

10.2 Основная литература

1. Fulton W. Introduction to toric varieties. Princeton, 1993
2. Fulton W. Young tableau, representation theory and geometry. CUP, 1997
3. V.I. Danilov. Algebraic Manifolds and Schemes (in: Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 23), Springer-Verlag, 1996.
4. V.I. Danilov. Cohomology of algebraic varieties. (in: Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 35), Springer-Verlag, 1996.
5. J. Harris. Algebraic Geometry: A First Course (Graduate Texts in Mathematics, v. 133). Springer-Verlag
6. I. R. Shafarevich, Basic algebraic geometry, Vols 1,2, Springer-Verlag 1994.

10.3 Дополнительная литература

1. R.Hartshorne, Algebraic Geometry (Graduate Texts in Mathematics, v 52),. Springer-Verlag, 1977
2. David A. Cox. Recent developments in toric geometry. arXiv:alg-geom/9606016