Правительство Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"

Факультет Математики

Программа дисциплины Математический анализ

для направления 010100.62 "Математика" подготовки бакалавра

Автор программы:
Левин А.М., кандидат ф.-м. наук, профессор, alevin57@gmail.com
Локтев С.А., кандидат ф.-м. наук, доцент, s.loktev@gmail.com

Рекомендована секцией УМС по математике «___»____________ 2012 г.
Председатель С.М. Хорошкин

Утверждена УС факультета математики «___»_____________2012 г.
Ученый секретарь Ю.М. Бурман_____________________

Москва, 2012

Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения кафедры-разработчика программы.

1 Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов направления 010100.62 «Математика» подготовки бакалавра.

Программа разработана в соответствии с:

- Стандартом НИУ для направления 010100.62 «Математика» подготовки бакалавра;
- Рабочим учебным планом университета по направлению 010100.62 «Математика» подготовки бакалавра, специализации Математика, утвержденным в 2012 г.

2 Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины Математический анализ являются:

- создание у студентов целостного представления о современном математическом анализе,
- овладение методами практических вычислений

3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен:

- Знать: формальное построение теории действительных чисел и элементарных функций; общие концепции предела и непрерывности, компактности, связности и пополнения; понятия топологического и метрического пространства; понятие производной функции (в том числе нескольких переменных) и ее основные свойства, включая формулу Тейлора и теоремы об обратной и неявной функциях; интегралы Римана и Лебега и их основные свойства.
- Уметь: вычислять пределы и производные; находить асимптотики с помощью рядов Тейлора; исследовать ряды на сходимость; находить экстремумы и исследовать на выпуклость функции (в том числе нескольких переменных); вычислять неопределённые и определённые интегралы элементарных функций.
- Иметь навыки (приобрести опыт) решения задач на перечисленные выше темы

В результате освоения дисциплины студент осваивает следующие компетенции:

Компетенция	Код по ФГОС/ НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
умение формулировать результат	СК-Б1	Правильно воспроизводит чужие результаты Правильно формулирует собственные результаты	Компетенция формируется в любом сегменте учебного процесса Формируется в процессе самостоятельных занятий (участие в семинарах, выполнение курсовых и дипломных работ).
умение строго доказать	СК-Б4	Воспроизводит доказательства	Изучение базового курса

Компетенция	Код по ФГОС/ НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
утверждение		стандартных результатов, услышанных на лекциях Оценивает строгость любых математических текстов	За счет повышения математической культуры в процессе обучения
умение грамотно пользоваться языком предметной области	ИК-2.2.	Распознает и воспроизводит имена основных математических объектов, возникающих при изучении данного раздела Владеет и свободно использует профессиональную математическую лексику	Продумывание и повторение услышанного на лекции. Беседы с другими математиками. Компетенция достигается в процессе накопления опыта, общения с преподавателями.

4 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Для специализации математика настоящая дисциплина является базовой, относится к профессиональному циклу. От студентов не требуется знаний и умений, выходящих за рамки школьной программы.
Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

- Топология, дифференциальные уравнения, дифференциальная геометрия, динамические системы, функциональный анализ, группы и алгебры Ли

5 Тематический план учебной дисциплины

Название темы	Всего часов по дисциплине	В том числе аудиторных			Самостоятельная работа
		Всего	Лекции	Семинары	
Множества. Операции над множествами. Отображения. Алгебра множеств. Мощности.	14	7	3	4	7
Действительные числа: формальное построение, теорема о верхней грани, теорема о стягивающихся отрезках, верхний и нижний пределы.	15	7	3	4	8
Предел последовательности. Свойства пределов (предел суммы, произведения и пр.), критерий Коши. Предел функции. Свойства предела функции. Непрерывные функции.	15	7	3	4	8
Ряды с постоянными членами. Абсолютная сходимость. Перестановка членов ряда. Критерии сходимости рядов с положительными членами (признак сравнения, Даламбера, Коши).	16	8	3	5	8

Асимптотические разложения по степеням приращения аргумента. Использование асимптотических разложений для нахождения пределов. Производная. Правила дифференцирования.	30	12	3	9	18
Степенные ряды, радиус сходимости. Умножение рядов. Формальное построение экспоненты, логарифма, степенной функции и тригонометрических функций. Экспонента в комплексной области.	14	7	3	4	7
Свойства непрерывных функций на отрезке. Теорема о промежуточном значении и теорема о достижении максимума.	16	7	3	4	9
Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя. Формула Тейлора с остаточными членами в форме Лагранжа и Пеано. Исследование функций с помощью производной.	24	11	3	8	13
Топологические и метрические пространства Определения. Примеры. Общее определение непрерывности и предела.	16	7	3	4	9
Компактность и счетная компактность. Компактность произведения топологических пространств. Теорема Гейне-Бореля. Критерий компактности подмножества в евклидовом пространстве. Ограниченность и достижение максимума непрерывной функции на компакте.	15	8	3	5	7
Пополнение метрического пространства. Полнота метрических компактов. Канторово множество на отрезке. Целые p-адические числа. Гомеоморфность канторова множества целым p-адическим числам, сюръекция канторова множества на метрический компакт.	15	8	3	5	7
Построение определенного интеграла. Свойства интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Неопределенный интеграл, техника нахождения первообразных.	14	8	3	5	6
Производная функции нескольких переменных. Частные производные. Производные высшего порядка. Формула Тейлора.	14	8	3	5	6

Теорема о неявной функции. Теорема об обратной функции.	14	8	3	5	6
Экстремумы функции нескольких переменных. Условный экстремум. Нахождение условного экстремума с помощью множителей Лагранжа.	14	8	3	5	6
Абстрактные пространства с мерой. Мера Лебега на R. Интеграл Лебега от положительных функций; теорема Беппо Леви.	26	11	3	8	15
Суммируемые функции. Предельный переход под знаком интеграла Лебега.	26	11	3	8	15
Произведение мер и теорема Фубини. Мера Лебега на евклидовом пространстве	26	11	3	8	15
Итого:	**324**	**154**	**54**	**100**	**170**

6 Формы контроля знаний студентов

Тип контроля	Форма контроля	1 год				2 год				Параметры **
		1	2	3	4	1	2	3	4	
Текущий (неделя)	Контрольная работа	8	8	9	9					письменная работа 90 минут
	Контрольная работа		7		7					письменная работа 90 минут
Промежуточный	Зачет	v		v						письменная работа 240 минут
	Экзамен		v							письменный экзамен 240 мин.
Итоговый	Экзамен				v					письменный экзамен 240 мин.

6 контрольных работ

6.1 Критерии оценки знаний, навыков

Контрольная работа состоит в решении стандартных задач по материалам курса, требующих технического навыка. Оценка выставляется пропорционально количеству правильно решённых задач.

На коллоквиуме (аналоге устного экзамена) проверяется умение студента самостоятельно воспроизвести материал лекций с доказательством (ответ на вопрос билета), знание основных определений и утверждений курса, а также умение решать задачи на понимание существа предмета. Оценка выставляется с учётом всех трёх этих аспектов.

Зачёт и экзамен состоит в решении задач, требующих сочетание технических навыков и понимания существа предмета. Оценка выставляется пропорционально количеству правильно решённых задач.

Оценки по всем формам текущего контроля выставляются по 10-ти балльной шкале.

6.2 Порядок формирования оценок по дисциплине

Оценка за текущий, промежуточный и итоговый контроль выставляется по 10-балльной системе.

Результирующая оценка за текущий контроль учитывает результаты студента по текущему контролю следующим образом:

$O_{текущий} = 0.5 * O_{к/р} + 0.25 * O_{кол} + 0.25 * O_{сам.\ работа}$

Преподаватель оценивает самостоятельную работу студентов**:** правильность выполнения домашних работ, задания для которых выдаются на семинарских занятиях, правильность решения задач на семинаре. Оценки за самостоятельную работу студента преподаватель выставляет в рабочую ведомость. Накопленная оценка - $O_{сам.\ работа}$ определяется перед промежуточным (итоговым) контролем.

Сумма удельных весов должна быть равна единице: $\sum n_i = 1$ Способ округления накопленной оценки текущего контроля в пользу студента.

Результирующая оценка за промежуточный (итоговый) контроль складывается из результатов накопленной результирующей оценки за текущий контроль, удельный вес которой составляет $k_1 = 0{,}5$ и оценки за экзамен/зачет, удельный вес $k_2 = 0{,}5$.

$O_{промежуточный/итоговый} = 0{,}5 * O_{текущий} + 0{,}5 * O_{зачет/экзамен}$

Способ округления накопленной оценки промежуточного (итогового) контроля в форме зачета/экзамена в пользу студента.

Студент может получить возможность пересдать низкие результаты за текущий контроль.

7 Содержание дисциплины

Раздел 1. Основания математического анализа.

Тема 1. Множества. Операции над множествами. Отображения. Алгебра множеств. Мощности.

Тема 2. Действительные числа: формальное построение, теорема о верхней грани, теорема о стягивающихся отрезках, верхний и нижний пределы.

Тема 3. Предел последовательности. Свойства пределов (предел суммы, произведения и пр.), критерий Коши. Предел функции. Свойства предела функции. Непрерывные функции.

Тема 4. Ряды с постоянными членами. Абсолютная сходимость. Перестановка членов ряда. Критерии сходимости рядов с положительными членами (признак сравнения, Даламбера, Коши).

Литература:

1. Зорич В.А. Математический анализ: в 2 т. – Изд. 5–е.– М.: МЦНМО, 2007.
2. Рудин У. Основы математического анализа.–Спб.: Лань, 2004.
3. Львовский С. М. Лекции по математическому анализу. – М.: МЦНМО, 2008.

Раздел 2. Функции действительной переменной

Тема 5. Асимптотические разложения по степеням приращения аргумента. Использование асимптотических разложений для нахождения пределов. Производная. Правила дифференцирования.

Тема 6. Степенные ряды, радиус сходимости. Умножение рядов. Формальное построение экспоненты, логарифма, степенной функции и тригонометрических функций. Экспонента в комплексной области.

Тема 7. Свойства непрерывных функций на отрезке. Теорема о промежуточном значении и теорема о достижении максимума.

Тема 8. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя. Формула Тейлора с остаточными членами в форме Лагранжа и Пеано. Исследование функций с помощью производной.

Литература:

1. Зорич В.А. Математический анализ: в 2 т. – Изд. 5–е.– М.: МЦНМО, 2007.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления в 3–х томах. – 8-е изд.– М.: Физматлит, 2006.
3. Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции одного переменного. –Спб.: Лань, 2002.
4. Львовский С. М. Лекции по математическому анализу. – М.: МЦНМО, 2008.

Раздел 3. Топологические и метрические подходы к анализу.

Тема 9. Топологические и метрические пространства Определения. Примеры. Общее определение непрерывности и предела.

Тема 10. Компактность и счетная компактность. Компактность произведения топологических пространств. Теорема Гейне-Бореля. Критерий компактности подмножества в евклидовом пространстве. Ограниченность и достижение максимума непрерывной функции на компакте.

Тема 11. Пополнение метрического пространства. Полнота метрических компактов. Канторово множество на отрезке. Целые p-адические числа. Гомеоморфность канторова множества целым p-адическим числам, сюръекция канторова множества на метрический компакт.

Литература:

1. Зорич В.А. Математический анализ: в 2 т. – Изд. 5–е.– М.: МЦНМО, 2007.
2. Рудин У. Основы математического анализа.–Спб.: Лань, 2004.
3. Львовский С. М. Лекции по математическому анализу. – М.: МЦНМО, 2008.

Раздел 4. Функции многих переменных

Тема 12. Производная функции нескольких переменных. Частные производные. Производные высшего порядка. Формула Тейлора.

Тема 13. Теорема о неявной функции. Теорема об обратной функции.

Тема 14. Экстремумы функции нескольких переменных. Условный экстремум. Нахождение условного экстремума с помощью множителей Лагранжа.

Литература:

1. Зорич В.А. Математический анализ: в 2 т. – Изд. 5–е.– М.: МЦНМО, 2007.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления в 3–х томах. – 8-е изд.– М.: Физматлит, 2006.
3. Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции одного переменного. –Спб.: Лань, 2002.
4. Спивак М. Математический анализ на многообразиях: Учебное пособие. –2-е изд.– Перев. с англ.– Спб.: Лань, 2005.
5. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. – Изд. 4-е.– М.: Едиториал УРСС, 2007.
6. Львовский С. М. Лекции по математическому анализу. – М.: МЦНМО, 2008.
7. Галеев Э.М. Оптимизация: теория, примеры, задачи.–М.:, УРСС, 2002.

Раздел 5. Мера и интеграл

Тема 15. Построение определенного интеграла. Свойства интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Неопределенный интеграл, техника нахождения первообразных.

Тема 16. Абстрактные пространства с мерой. Мера Лебега на R. Интеграл Лебега от положительных функций; теорема Беппо Леви.

Тема 17. Суммируемые функции. Предельный переход под знаком интеграла Лебега.

Тема 18. Произведение мер и теорема Фубини. Мера Лебега на евклидовом пространстве.

Литература:

1. Зорич В.А. Математический анализ: в 2 т. – Изд. 5–е.– М.: МЦНМО, 2007.
2. Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции одного переменного. –Спб.: Лань, 2002.
3. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. – Изд. 4-е.– М.: Едиториал УРСС, 2007.
4. Львовский С. М. Лекции по математическому анализу. – М.: МЦНМО, 2008.
5. Окстоби Дж. Мера и категория. – Пер. с англ.– М.: ЛКИ, 2008.

8 Образовательные технологии

В первом семестре три пары академических часов распределяются следующим образом. На одной паре проводится лекция. На другой — классический семинар раздельно в двух разных группах, одна из которых предназначена для изучавших ранее математический анализ, вторая — для изучающих с нуля. Третья пара проводится по системе листков (задач для самостоятельной работы), где с каждым из студентов беседуют индивидуально по материалу этих задач.

Во втором семестре две пары академических часов распределены между лекциями и семинарами по системе листков.

9 Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

9.1 Тематика заданий текущего контроля

Примерные вопросы для коллоквиума

1. Аксиоматика вещественных чисел. Принцип Архимеда как следствие аксиом.
2. Непрерывность функций. Эквивалентность определения непрерывности функции по Коши и по Гейне.

Примерные задания для контрольной работы

1) Напишите асимптотическое разложение в нуле функции ln(cos(x)) вплоть до 4 степени x.

9.2 Примеры заданий промежуточного /итогового контроля

1. Выясните сходимость последовательности и найдите предел последовательности

$$a_n = (1 + n^m)^{(n^k)}$$

в зависимости от целых значений параметров m и k.

10 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

10.1 Базовый учебник

Зорич В.А. Математический анализ: в 2 т. – Изд. 5–е.– М.: МЦНМО, 2007.

10.2 Основная литература

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления в 3–х томах. – 8-е изд.– М.: Физматлит, 2006.
2. Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции одного переменного. –Спб.: Лань, 2002.
3. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу (для ВУЗов).–М.: АСТ, 2003.
4. Рудин У. Основы математического анализа.–Спб.: Лань, 2004.
5. Спивак М. Математический анализ на многообразиях: Учебное пособие. –2-е изд.– Перев. с англ.– Спб.: Лань, 2005.
6. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. – Изд. 4-е.– М.: Едиториал УРСС, 2007.
7. Львовский С. М. Лекции по математическому анализу. – М.: МЦНМО, 2008.

10.3 Дополнительная литература

1. Окстоби Дж. Мера и категория. – Пер. с англ.– М.: ЛКИ, 2008.
2. Галеев Э.М. Оптимизация: теория, примеры, задачи.– М.:, УРСС, 2002.