Правительство Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Факультет Математики

Программа дисциплины Геометрия

для направления 010100.62 "Математика" подготовки бакалавра

Автор программы: Шварцман О.В., д.ф-м.н, доцент, ossipsh@gmail.com

Одобрена на заседании кафедры геометрии и топологии «___»____________ 2010 г.
Зав. Кафедрой: академик РАН В.А.Васильев

Рекомендована секцией УМС по математике «___»____________ 2010 г.
Председатель С.К. Ландо

Утверждена УС факультета математики «___»_____________2010 г.
Ученый секретарь Ю.М. Бурман_____________________

Москва, 2010

1 Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов направления 010100.62 «Математика» подготовки бакалавра.

Программа разработана в соответствии с:

- Стандартом НИУ для направления 010100.62 «Математика» подготовки бакалавра;
- Рабочим учебным планом университета по направлению 010100.62 «Математика» подготовки бакалавра, специализации Математика, утвержденным в 2010 г.

2 Цели освоения дисциплины

1.1. Целями освоения дисциплины Геометрия являются:

- получение представления об основных структурах, объектах и задачах классической геометрии и методах работы с многомерными объектами;
- получение знания об основных понятиях и результатах классической геометрии;
- получение представления о современных методах работы с геометрическими объектами;
- развитие геометрической интуиции, в том числе и многомерной.

3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен:

- Владеть основными методами аналитической геометрии на плоскости и в пространстве.
- Знать классификацию и уметь исследовать поверхности второго порядка(в проективном и аффинном пространствах.
- Владеть понятием группы геометрических преобразований
- Уметь решать задачи проективной и аффинной геометрии, используя группы преобразований
- Владеть и уметь использовать идею проективной двойственности
- Уметь работать с основными объектами плоских неевклидовых геометрий(сферическая
- геометрия и геометрия Лобачевского)
- Владеть основами выпуклой и дискретной геометрии плоскости и пространства.

Любая математическая компетенция достигается путем решения задач. На лекциях вводятся основные объекты, разбираются поучительные примеры ,доказываются ключевые теоремы. Но этого совершенно недостаточно. Единственный путь к мастерству - самостоятельное решение задач.

В результате освоения дисциплины студент осваивает следующие компетенции:

Компетенция	Код по ФГОС/ НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
умение формулировать результат	ПК-3	Правильно воспроизводит чужие результаты Правильно формулирует собственные результаты	Компетенция формируется в любом сегменте учебного процесса Формируется в процессе активных занятий геометрией (участие в семинарах, выполнение курсовых и дипломных работ).
умение строго доказать утверждение	ПК-4	Воспроизводит доказательства стандартных результатов, услышанных на лекциях Оценивает строгость любых геометрических текстов	Изучение базового курса За счет повышения математической культуры в процессе обучения
умение грамотно пользоваться языком предметной области	ПК-7	Распознает и воспроизводит имена основных геометрических объектов, возникающих при изучении данного раздела Владеет и свободно использует профессиональную геометрическую лексику	Продумывание и повторение услышанного на лекции. Беседы с носителями геометрического языка. Компетенция достигается в процессе накопления геометрического опыта, общения с преподавателями.
понимание корректности постановок задач	ПК-10	Понимает постановки только опорных геометрических задач Владеет и использует постановки «многоходовых» геометрических задач	Продумывание базовых понятий курса Вырабатывается в процессе решения задач, самостоятельного чтения, работы над курсовыми заданиями
выделение главных смысловых аспектов в доказательствах	ПК-16	Понимает и воспроизводит основные моменты базовых геометрических доказательств и построений Обосновывает и оценивает логические ходы в произвольных геометрических рассуждениях и конструкциях	Продумывание ключевых моментов лекций Вырабатывается путем активного решения задач, самообразования, общения с преподавателями.

4 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Для специализации математика настоящая дисциплина является базовой, относится к профессиональному циклу.

Для освоения учебной дисциплины, студенты должны владеть следующими знаниями и компетенциями:

- для усвоения материала 1,2 модуля - хорошим знанием школьного курса геометрии и векторной алгебры.
- для усвоения материала 3;4 модуля - владение курсом алгебры в объеме первых двух модулей

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

Топология, математический анализ, алгебра, алгебраическая геометрия.

5 Тематический план учебной дисциплины

№	Название темы	Всего часов по дисциплине	В том числе аудиторных			Самостоятельная работа
			Всего	Лекции	Семинары	
1	Элементарная геометрия на плоскости	17	7	4	3	10
2	Кривые второго порядка.	23	10	7	3	13
3	Евклидова плоскость и ее группа движений.	23	10	6	4	13
4	Выпуклая и дискретная геометрия плоскости.	25	11	7	4	14
5	Евклидова геометрия трехмерного пространства.	23	10	6	4	13
6	Трехмерные и многомерные линейные геометрические объекты.	23	10	6	4	13
7	Трехмерная и многомерная выпуклая и дискретная геометрия.	23	10	6	4	13
8	Поверхности второго порядка в евклидовом пространстве.	23	9	4	5	14
9	Проективная прямая.	18	9	4	5	9
11	Проективные коники и кубики.	18	7	4	3	11
12	Проективное пространство.	18	7	4	3	11
13	Проективная геометрия трехмерного пространства.	18	8	4	4	10
14	Аффинная геометрия.	18	9	6	3	9
15	Гиперболическая геометрия.	18	9	4	5	9
	Итого:	**288**	**126**	**72**	**54**	**162**

6 Формы контроля знаний студентов

Тип контроля	Форма контроля	1 год				Параметры **
		1	2	3	4	
Текущий (неделя)	Контрольная работа	7	7	9		письменная работа 1,5 часа
Текущий (неделя)	Коллоквиум		6	8		письменная работа 2,5 часа
Промежу-точный	Зачет		v			письменная работа 4 часа
Итоговый	Экзамен			v		экзамен письменная работа 4 часа

6.1 Критерии оценки знаний, навыков

Оценки по всем формам текущего контроля выставляются по 10-ти балльной шкале.

Главная форма контроля - сдача задач из текущих листочков(15-20 задач по каждой теме).

Контрольная работа: студент должен продемонстрировать умение пользоваться основными техническими (вычислительными) приемами, которые используются в изученном разделе геометрии. Предлагается 6 задач на 90 минут.

Коллоквиум: письменная работа на 2,5 часа.:6 задач носят исследовательский характер и предъявляют повышенные требования к теоретической подготовке студента, его геометрическому видению (геометрической интуиции).

Экзамен (зачет): письменная работа, состоящая из 6-10 задач на 4 часа. Преобладают задачи, требующие хорошего понимания происходящего в курсе геометрии отчетного модуля

(компетенции – умения и владения)

7 Содержание дисциплины

7.1 <u>Раздел 1. Элементарная геометрия на плоскости</u>

<table>
<tr><th rowspan="2">Содержание темы</th><th rowspan="2">Лекции</th><th rowspan="2">Семинары</th><th colspan="2">Самостоятельная работа</th><th colspan="2">Литература</th></tr>
<tr><th>Подготовка к семинарам</th><th>Письменное домашнее задание</th><th>Базовая</th><th>Дополни тельная</th></tr>
<tr><td>Координаты, преобразование координат</td><td rowspan="2">2</td><td>4</td><td>3</td><td></td><td>[1],п.2.1</td><td></td></tr>
<tr><td>Уравнения прямой, Касательная к кривой. Пучки прямых</td><td>4</td><td>4</td><td></td><td>[1],п.2.2</td><td></td></tr>
</table>

7.2 <u>Раздел 2. Кривые второго порядка</u>

Конические сечения как геометрические места точек	2	5	2		[1],п .4.1	[6],$$15, 16,17
Классификация кривых второго порядка и их приведение к каноническому виду	2	5	1	3	[1],п .4.1	
Пучки коник, теорема Паскаля.		5	2		[1],п .4.2	

7.3 <u>Раздел 3. Евклидова плоскость и ее группа движений</u>

Классификация движений Роль отражений	2	4	2		[1],п .5.3	
Группа движений евклидовой плоскости. Подгруппа переносов	2	7	4		[1],п .5.3	
Решетки		4	2		[1],п .5.4	

7.4 <u>Раздел 4. Выпуклая и дискретная геометрия плоскости</u>

Системы линейных неравенств. Выпуклые многоугольники	2	4	2		[1],п.2.5	[1],$2
Лемма Фаркаша и ее применения		4	2		[1],п.2.5	[1],$2
Лемма Минковского. Области Вороного и Делоне	2	4	2		[1],п.2.5	
Дискретные группы движений плоскости		4	1		[1],п .5.4	

7.5 <u>Раздел 5. Евклидова геометрия трехмерного пространства.</u>

Уравнения прямых и плоскостей.Их взаимное расположение в пространстве	2	4	2		[2],$8.4	
Скалярное прозведение. Неравенство Коши-Буняковского Ориентированная площадь и ориентированный объем		4	2		[2],$8.4	
Группа движений трехмерного пространства	2	4	2		[2],$8.4	
Выпуклые многогранники и конечные подгруппы в пространстве.		4	2			[4],12.5

7.6 Раздел 6. Трехмерные и многомерные линейные геометрические объекты.

Трехмерная аффинная геометрия	2	4	4			
Аффинная геометрия подпространств. Связь с системами линейных уравнений	2	5	4		[2],глава8	
Линейные функции и барицентрические координаты		5	4			

7.7 Раздел 7. Трехмерная и многомерная выпуклая и дискретная геометрия.

Полиэдральные конусы и их задание линейными неравенствами, двойственный конус.	2	8	4			[1],глава3
Выпуклые множества, выпуклые оболочки, выпуклые многогранники	2	4	4			[1],глава3
Линейное программирование для математиков		2	4			

7.8 Раздел 8. Поверхности второго порядка в евклидовом пространстве.

Классификация. Приведение к каноническому виду	2	6	3	4	[2],$6.2	
Прямые на поверхностях второго порядка. Взаимное расположение аффинных подпространств и квадрик		6	7		[2],$11.6	

7.9 Раздел 9. Проективная прямая.

Проективная прямая, аффинная карта и аффинная система координат на ней. Однородные координаты. Однородность проективной прямой.	2	4	4		[2],$9.1	[6],$1,глава 2
Двойное отношение. Дробно-линейные преобразования		4	4		[1],3.1, 3.2	

7.10 Раздел 10. Проективные коники и кубики.

Проведение коники через пять точек, конструкция Штейнера. Двойственная коника; полярное соответствие.	2	4	4		[2],$9.1	
Теоремы Паскаля и Брианшона; теорема Дезарга.	2	4	4		[1],4.3	

7.11 Раздел 11. Проективное пространство.

Проективное пространство. Гиперплоскости в проективном пространстве. Двойственное проективное пространство	2	4	4		[2],$9.1	
Проективные преобразования и их простейшие свойства		4	4		[2],$9.2	

7.12 Раздел 12. Проективная геометрия трехмерного пространства.

Прямые в трехмерном пространстве, Плюккеровы координаты	2	4	4		[2],$10.1	
Отображение Веронезе. Проектирование из точки на плоскость		4	4		[2],$10,5	

7.13 Раздел 13. Аффинная геометрия.

Аффинное пространство, его место в проективной геометрии.	2	4	4		[2],$8.1	

Аффинная группа. Аффинная и проективная классификация квадрик.	2	4	4		[2],$$8.3, 11.1,11.5	

7.14 Раздел 14. Гиперболическая геометрия.

Плоскость Лобачевского и ее модели в круге и верхней полуплоскости. Площади многоугольников.	2	2	5		[1],5.2	
Отражения и группы порожденные отражениями; фундаментальные многоугольники; модулярная фигура.		2	5		[1],5.4	

8 Образовательные технологии

На лекции даются необходимые определения и доказываются ключевые теоремы курса, разбираются поучительные примеры. После этого студентам выдается листок с задачами для самостоятельного решения, содержащий как упражнения для усвоения стандартных фактов и приемов, так и нестандартные задачи, позволяющие проверить уровень понимания теории.

Многие задачи предваряют (продолжают) тематику лекций. Студент сдает задачи преподавателям во время семинарских занятий. Возможна замена семинарских занятий мастер-классами и неформальным обсуждением решения трудных задач.

9 Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

Образец листочка с задачами

Геометрия. Листок №1

1. Дан параллелограмм ABCD, M, N, P, Q – середины сторон AB, BC, CD, AD соответственно. Написать матрицу перехода от базиса $\{AM, AP\}$ к базису $\{NP, NQ\}$. Найти координаты вектора AC в первом и втором базисе.

2. Пусть A, B, C – вершины невырожденного треугольника. Как связаны координаты точки в аффинных системах координат (A, AB, AC) и (B, BA, BC)?

3. В задаче 1 написать уравнение диагонали BD в системе координат (O, NP, NQ), где O – точка пересечения диагоналей параллелограмма.

4. В фиксированной аффинной системе координат найти уравнение прямой

а) заданной точкой с координатами (-1,-3) и вектором с координатами (2,1); точкой (-1,-3,2) и вектором (2,1,4);

б) проходящей через точки (3,-6,2), (4,2,-1);

в) проходящей через точку (2,5) параллельно прямой $2x + y - 3 = 0$;

г) по которой пересекаются плоскости $x - y + 3z - 3 = 0$, $2x - y + z - 5 = 0$.

5. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки (t_i, t_i^2, t_i^3), $i = 1, 2, 3$, $t_i \neq t_j, i \neq j$.

6. Напишите систему линейных неравенств, определяющих полосу между прямыми $2x - y + 5 = 0$, $2x - y - 1 = 0$.

7. Напишите систему линейных неравенств, определяющих внутренность треугольника с вершинами (2,1), (2,-5), (-4,-1).

8. Доказать, что в трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения боковых сторон лежат на одной прямой.

9. Если стороны ВС и АД четырехугольника АВСД параллельны и М – произвольная точка стороны АВ, то прямая, проходящая через точку А параллельно СМ, пересекает прямую, проходящую через точку В параллельно ДМ, в точке, лежащей на стороне СД.

10. Середины диагоналей выпуклого четырехугольника и середина отрезка, соединяющего точки пересечения его противоположных сторон, лежат на одной прямой. Доказать.

Образец контрольной работы

Геометрия. Контрольная работа

1. Выбрав подходящую систему координат, напишите уравнение общего перпендикуляра скрещивающихся диагоналей двух смежных граней куба. Вычислите его длину, если ребро куба равно 1.

2. Докажите, что если высоты тетраэдра пересекаются в одной точке, то любые два его противоположных ребра перпендикулярны.

3. Даны параллелограмм $ABCD$ и точка M. Точка M_1 симметрична M относительно A, точка M_2 симметрична M_1 относительно B, точка M_3 симметрична M_2 относительно C и точка M_4 симметрична M_3 относительно D. Докажите, что точки M_4 и M совпадают.

4. Дана трапеция $ABCD$. На боковых сторонах AD и BC взяты соответственно точки K и L так, что прямые AL и CK параллельны. Докажите, что прямые BK и DL также параллельны.

5. Доказать, что если биссектрисы двух плоских углов трехгранного угла взаимно перпендикулярны, то биссектриса третьего плоского угла перпендикулярна первым двум биссектрисам.

6. Докажите, что алгебраическая сумма расстояний от вершин тетраэдра до любой плоскости, проходящей через его центр тяжести, равна нулю.

7. Даны три отражения, направления которых определены сторонами некоторого треугольника, а зеркала проходят через середины соответствующих сторон этого треугольника. Докажите, что композицией этих трёх отражений является также отражение. Постройте его зеркало.

8. Даны две параллельные прямые и на одной из них отрезок AB. Постройте его середину с помощью одной линейки.

9. Даны две параллельные прямые и точка A. С помощью одной линейки постройте прямую, проходящую через точку A параллельно данным прямым.

Образец письменного задания для коллоквиума

1. Выясните, симметричны ли отрезки $[AB]$ и $[CD]$ относительно некоторого центра. Если да, то найдите координаты этого центра: $A(0,0)$, $B(2,-1)$ и $C(1,1)$, $D(3,0)$.

(Ответ: да, точка (1,5;0)).

2. Докажите, что если фигура на евклидовой плоскости имеет ровно две оси симметрии, то они перпендикулярны между собой.

3. Докажите, что преобразования

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y + kx, \end{cases} \qquad \text{(где } k,\ k_1 \text{ и } k_2 \text{ – действительные числа)}$$

образуют группу.

4. Существует ли аффинное преобразование, переводящее точки $(1;1)$ и $(2,1)$ в точки $(-1;0)$ и $(0,1)$, а прямую $4x+2y-9=0$ в прямую $3x-y=0$? Если существует, то определите его линейную часть и вектор сдвига.

(Ответ: $x+y-3$, $x-y$).

5. На евклидовой плоскости найти образ прямой прямой $x-3=0$ в зеркале $x-y+2=0$.

(Ответ: $y-5=0$).

6. Докажите, что если G – центр масс системы точек $A_1,\ldots,A_n$, где $n \geq 2$, и M – произвольная точка, то $|MG| < \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|MA_i|$.

Образец варианта экзамена (зачета)

1. Пусть MN – хорда эллипса, проходящая через его фокус F и пересекающая эллипс в точках M и N. Доказать элементарно (заранее спасибо), что

а) касательные к эллипсу в точках M и N пересекаются в точке D, лежащей на директрисе фокуса;

б) $DF \perp MN$.

2. На плоскости лежат две монеты M_1 и M_2. Радиус первой равен 2, а второй -4. Расстояние между центрами монет равно 8. Найти ГМТ, каждая из которых служит центром монеты, которая касается монет M_1 и M_2. Если сможете, то напишите простенькое уравнение найденного ГМТ в подходящей декартовой системе координат (заранее спасибо).

3. Пусть S_1 – поворот вокруг оси $x - 1 = 0$ $y = 0$ на угол $2\pi/5$, а S_2 – поворот на такой же угол вокруг оси $z - 1$ $x = 0$. Доказать (элементарно), что движение S_1 и S_2 порождают бесконечную группу движений (заранее спасибо).

4. Найти на плоскости ГМТ, каждая из которых служит центром инверсии, которая переводит две данные окружности в равные.

5. Непустой многогранник X задан системой неравенств $(a_i, x) \geq b_i$, $i = 1, \ldots, s$. Доказать эквивалентность следующих утверждений

а) X – неограниченное множество;

б) система неравенств $(a_i, h) \geq 0$, $i = 1, \ldots, s$, имеет ненулевое решение h.

6. Доказать, что окружности, описанные около двух граней тетраэдра, пересекаются под тем же углом, как и окружности, описанные около двух других его граней.

10 Порядок формирования оценок по дисциплине

Оценка за текущий, промежуточный и итоговый контроль выставляется по 10-балльной системе.

Результирующая оценка за текущий контроль учитывает результаты студента по текущему контролю следующим образом:

$O_{текущий} = n_1 * O_{к/р} + n_2 * O_{кол} + n_3 * O_{сам.\ работа}$

Преподаватель оценивает самостоятельную работу студентов**:** правильность выполнения домашних работ, задания для которых выдаются на семинарских занятиях, правильность решения задач на семинаре. Оценки за самостоятельную работу студента преподаватель выставляет в рабочую ведомость. Накопленная оценка - $O_{сам.\ работа}$ определяется перед промежуточным (итоговым) контролем.

Оценка за домашнее письменное задание: студент решил менее четверти задач листка - оценка 0-3 балла в зависимости от качества его рассказа и трудности решенных задач;

студент решил от четверти до половины задач - оценка 4-5 балла (с теми же оговорками), студент решил от половины до трех четвертей предложенных задач - оценка 6-8 баллов; студент решил больше трех четвертей предложенных задач - оценка 9-10 баллов

Сумма удельных весов должна быть равна единице: $\sum n_i = 1$ Способ округления накопленной оценки текущего контроля в пользу студента.

Результирующая оценка за промежуточный (итоговый) контроль складывается из результатов накопленной результирующей оценки за текущий контроль, удельный вес которой составляет $k_1 = 0{,}5$ и оценки за экзамен/зачет, удельный вес $k_2 = 0{,}5$.

$O_{промежуточный/итоговый} = 0{,}5 * O_{текущий} + 0{,}5 * O_{зачет/экзамен}$

Способ округления накопленной оценки промежуточного (итогового) контроля в форме зачета/экзамена в пользу студента.

Студент может получить возможность пересдать низкие результаты за текущий контроль.

11 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

<u>Базовые учебники</u>

1. Прасолов В.В., Тихомиров В.М. Геометрия – Изд. 2–е.– М.: МЦНМО, 2007.
2. Шафаревич И.Р., Ремизов А.О. Линейная алгебра и геометрия –М.: ФИЗМАТЛИТ,2009.

<u>Дополнительная литература</u>

1. Артамонов В.А., Латышев В.Н. Линейная алгебра и выпуклая геометрия.–М.: Факториал, 2004.
2. Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия.– М.:Физматлит, 2004.
3. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии.–М.:Физматлит, 2006.
4. Берже М. Геометрия, т. 1-2. М. Мир, 1984.
5. Берже М, Бери Ж.-П., Пансю П., Сен-Реймон К. Задачи по геометрии с комментариями и решениями. – М. Мир, 1989
6. Понарин Я.П. Аффинная и проективная геометрия - М.: МЦНМО, 2009.