



Правительство Российской Федерации

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования**

**Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"**

Факультет Мировой экономики и мировой политики

Программа дисциплины

Математический анализ

**для направления 38.03.01 «Экономика» подготовки бакалавра
образовательная программа «Мировая экономика»**

Автор программы:

к. пед. н., доцент Салимова Альфия Фаизовна (asalimova@hse.ru)

Утверждена на заседании департамента математики на факультете экономических наук
«30» 08.2016 г.

Зав. кафедрой Ф.Т. Алескеров

Рекомендована секцией УМС «__» _____ 20 г.
Председатель

Утверждена Ученым Советом факультета «__» _____ 20 г.
Ученый секретарь

Москва, 2016

Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения кафедры-разработчика программы.



1 Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов. Курс предназначен для студентов, обучающихся по направлению 38.03.01 «Экономика», образовательная программа «Мировая экономика» подготовки бакалавра, изучающих дисциплину «Математический анализ».

Программа разработана в соответствии с:

- образовательным стандартом Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»;
- образовательной программой направления 38.03.01 «Экономика» подготовки бакалавра;
- рабочим учебным планом университета по направлению подготовки 38.03.01 «Экономика» образовательной программы «Мировая экономика», утвержденным в 2016г.

2 Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Математический анализ» являются

- ознакомление студентов с основами математического анализа;
- формирование навыков работы с абстрактными математическими понятиями;
- знакомство с прикладными задачами дисциплины;
- обеспечение запросов других математических дисциплин;
- подготовка к изучению современных курсов по экономической теории.

3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен:

- знать формулировки основных понятий и теорем математического анализа, необходимые для дальнейшего изучения дисциплин, предусмотренных базовым и рабочим учебными планами;
- уметь интерпретировать основные понятия математического анализа на простых модельных примерах, применять методы дисциплины при решении задач, возникающих в других дисциплинах;
- владеть навыками применения современного инструментария дисциплины при решении задач, возникающих в других дисциплинах.

В результате освоения дисциплины студент осваивает следующие компетенции:

Компетенция	Код по ФГОС / НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
Универсальная	УК-1	Способен учиться, приобретать новые знания, умения, в том числе в области, отличной от	Стандартные (лекционно-семинарские)



Компетенция	Код по ФГОС / НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
		профессиональной	
Универсальная	УК-5	Способен работать с информацией: находить, оценивать и использовать информацию из различных источников, необходимую для решения научных и профессиональных задач (в том числе на основе системного подхода)	Стандартные (лекционно-семинарские)
Универсальная	УК-6	Способен вести исследовательскую деятельность, включая анализ проблем, постановку целей и задач, выделение объекта и предмета исследования, выбор способа и методов исследования, а также оценку его качества	Стандартные (лекционно-семинарские)
Универсальная	УК-9	Способен критически оценивать и переосмысливать накопленный опыт (собственный и чужой), рефлексировать профессиональную и социальную деятельность	Стандартные (лекционно-семинарские)
Профессиональная	ПК-10	Способен к постановке научно-исследовательских задач	Стандартные (лекционно-семинарские)
Профессиональная	ПК-11	Способен осуществлять сбор, анализ и обработку статистических данных, информации, научно-аналитических материалов, необходимых для решения поставленных экономических задач	Стандартные (лекционно-семинарские)
Профессиональная	ПК-13	Способен на основе описания экономических процессов и явлений строить теоретические и эконометрические модели, анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты	Стандартные (лекционно-семинарские)
Профессиональная	ПК-17	Способен использовать для решения аналитических и исследовательских задач современные технические средства и информационные технологии	Стандартные (лекционно-семинарские)
Профессиональная	ПК-19	Способен к презентации результатов аналитической и исследовательской деятельности	Стандартные (лекционно-семинарские)



Компетенция	Код по ФГОС / НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
Профессиональная	ПК-21	Способен самостоятельно организовать свою деятельность в рамках поставленных профессиональных задач	Стандартные (лекционно-семинарские)
Профессиональная	ПК-25	Способен критически оценить предлагаемые варианты управленческих решений и разработать и обосновать предложения по их совершенствованию с учетом критериев социально-экономической эффективности, рисков и возможных социально-экономических последствий	Стандартные (лекционно-семинарские)

4 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Математический анализ» относится к циклу математических и естественнонаучных дисциплин. Курс предназначен для студентов по направлению 38.03.01 Экономика, образовательная программа «Мировая экономика» подготовки бакалавра, изучается в первом, втором, третьем и четвертом модулях первого курса. От слушателей не требуется никаких предварительных знаний по математике сверх программы средней школы. Программа соответствует требованиям ФГОС. В данном курсе рассматриваются разделы математического анализа, образующие элемент базового образования студентов по данной специальности. Сведения, полученные при изучении данного курса, будут использоваться в изучении теории вероятностей, математической статистики, методов оптимальных решений, теории игр, математической экономики, эконометрики. Они могут быть использованы для разработки и применения численных методов решения задач из многих областей знания, для построения математических моделей таких задач. Программа предусматривает чтение лекций (64 часа) и проведение семинарских занятий (62 часа). Программой предусмотрена самостоятельная работа студента в объеме 140 часов, включающая в себя изучение теоретического материала, подготовку к семинарским занятиям, выполнение домашнего задания, подготовку к четырем промежуточным контрольным работам и к заключительному экзамену по данной дисциплине. В результате изучения курса студенты должны: знать точные формулировки основных понятий, уметь интерпретировать их на простых модельных примерах; в том числе свободно использовать навыки дифференцирования и интегрирования функций одной и нескольких переменных, исследовать поведение функций, строить эскизы графиков функций, проводить экономические исследования, используя вошедшие в курс методы оптимизации, решать возникающие в процессе анализа экономических ситуаций простейшие дифференциальные уравнения, в математической статистике, теории вероятностей и эконометрике, обладать навыками работы и быть готовыми понимать разделы учебной и научной литературы, связанные с применением дифференцирования и интегрирования, методов оптимальных решений, анализом рядов.

Изучение данной дисциплины базируется на следующих дисциплинах:

- математика в объеме средней школы.

Для освоения учебной дисциплины, студенты должны владеть следующими знаниями и компетенциями:



- знаниями основных понятий и теорем математики в объеме средней школы;
- навыками решения типовых задач математики в объеме средней школы.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

- теория вероятностей и математическая статистика;
- эконометрика;
- методы оптимальных решений;
- теория игр;
- математическая экономика.

5 Тематический план учебной дисциплины

№	Название раздела	Всего часов	Аудиторные часы			Самостоятельная работа
			Лекции	Семинары	Практич. занятия	
1.	Предел и непрерывность функции одной переменной	26	6	6		14
2.	Дифференциальное исчисление функции одной переменной	42	10	10		22
3.	Дифференциальное исчисление функций многих переменных	36	8	8		20
4.	Классические методы оптимизации	34	8	8		18
5.	Интегральное исчисление функции одной переменной	38	10	10		18
6.	Интегрирование простейших дифференциальных уравнений	38	10	10		18
7.	Интегрирование функций многих переменных	28	6	6		16
8.	Числовые, функциональные и степенные ряды	24	6	4		14
	Итого	266	64	62	0	140

6 Формы контроля знаний студентов

Тип контроля	Форма контроля	1 год				Параметры
		1	2	3	4	
Текущий	Контрольные работы	*	*	**		Письменная работа 80 минут, проводится в первом, втором и третьем модулях
	Домашняя контрольная работа		*			Письменная работа. Задание выдается на второй-третьей неделе второго модуля. Работа сдается на седьмой неделе 2 модуля



Итоговый	Экзамен			*	Письменная экзаменационная работа 120 минут
----------	---------	--	--	---	---

6.1 Критерии оценки знаний, навыков

Контроль знаний осуществляется в формах текущего и итогового контроля. Текущий контроль включает контрольные работы №1, №2, №3, №4, которые проводятся в первом, втором и третьем модулях соответственно, а также домашнюю контрольную работу, проводимую во втором модуле. Их продолжительность составляет 80 минут. Итоговый контроль осуществляется в форме письменной экзаменационной работы продолжительностью 120 минут.

Для прохождения контроля студент должен продемонстрировать знания основных определений и формулировок теорем; умение решать типовые задачи, предлагаемые в типовых вариантах контрольных работ, разобранных на семинарских занятиях.

6.2 Порядок формирования оценок по дисциплине

В первом модуле накопленная оценка за текущий контроль рассматривается как оценка за формы текущего контроля, предусмотренные в РУП:

$$O_1 = O_{к.р._1}.$$

Во втором модуле накопленная оценка за текущий контроль рассматривается как оценка за формы текущего контроля, предусмотренные в РУП:

$$O_2 = 0,6 \cdot O_{к.р._2} + 0,4 \cdot O_{д.к.р.}$$

В третьем модуле накопленная оценка за текущий контроль рассматривается как средневзвешенная оценка за формы текущего контроля, предусмотренные в РУП:

$$O_3 = 0,5 \cdot O_{к.р._3} + 0,5 \cdot O_{к.р._4}.$$

Оценки $O_{к.р._1}$, $O_{к.р._2}$, $O_{к.р._3}$, $O_{к.р._4}$, $O_{д.к.р.}$, фигурирующие в этих формулах, выставляются в 100-балльной системе.

Накопленная оценка за дисциплину рассчитывается следующим образом:

$$O_{накопленная} = (O_1 + O_2 + O_3) : 3.$$

Это оценка вычисляется в 100-балльной системе, а затем переводятся в 10-балльную систему. Способ округления накопленной итоговой оценки производится по правилам арифметики округления.

Итоговая оценка за курс в форме экзамена выставляется по следующей формуле, где $O_{экзамен}$ – оценка за работу непосредственно на экзамене, выставленная сначала в 100-балльной системе, а затем переведенная в 10-балльную систему:

$$O_{итоговая} = 0,7 \cdot O_{экзамен} + 0,3 \cdot O_{накопленная}.$$

Способ округления оценки итогового контроля производится по правилам арифметики округления.

Данная программа не предусматривает возможность пересдачи неудовлетворительных оценок, полученных за любую из форм текущего контроля, а также возможность компенсировать оценки за контрольные и домашние контрольные работы, не полученные вследствие про-



пуска семинарского занятия по любой причине. В этом случае за соответствующую форму текущего контроля студенту выставляется 0 баллов.

Пропуск каждого семинарского занятия по неуважительной причине приводит к снижению накопленной оценки на 10 баллов в 100-балльной системе (или на 1 балл в 10-балльной системе), вплоть до 0 баллов.

Перевод в 5-балльную шкалу осуществляется по правилу:

Оценка по 10-балльной шкале	Оценка по 5-балльной шкале	
0	неудовлетворительно/незачет	
1		
2		
3		
4	удовлетворительно	зачет
5		
6	хорошо	
7	отлично	
8		
9		
10		

На показе экзаменационной работы студенту по решению преподавателя может быть предложена дополнительная задача для возможности повышения оценки при условии, что за письменную экзаменационную работу студент получил не менее 30 баллов в столбальной шкале. На передаче студенту не предоставляется возможность получить дополнительный балл для повышения накопленной оценки за текущий контроль.

В диплом выставляется итоговая оценка по учебной дисциплине.

7 Содержание дисциплины

Тема I. Предел и непрерывность функции одной переменной

Множества, операции объединения, пересечения, дополнения. Отображения множеств (функции). Числовая прямая, расстояние между точками числовой прямой. Промежутки, окрестность точки, проколота окрестность точки. Числовые функции. Область определения, множество значений функции. Элементарные функции.

Предел функции одной переменной на бесконечности. Предел функции одной переменной в точке. Односторонние пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Арифметические свойства пределов. Свойства операции предельного перехода. Первый и второй замечательные пределы.

Сравнение функций. Символы o -малое и O -большое и их использование для раскрытия неопределенностей при вычислении пределов. Эквивалентные бесконечно малые.

Непрерывность функции в точке и на множестве. Точки разрыва функции, их классификация. Арифметические свойства непрерывных функций. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Лит-ра: основная: [1], с. 59-61, 65-121, 127-189.

Тема II. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Понятие производной функции одной переменной в точке. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции в точке. Понятие дифференцируемости функции в точке. Связь дифференцируемости функции одной переменной с ее непрерывностью. Экономическая интерпретация производной.

Правила дифференцирования. Дифференцирование сложной функции. Формула логарифмического дифференцирования. Теорема о дифференцируемости и производной обратной функции. Таблица производных основных элементарных функций. Производная функции, заданной параметрически. Производная функции, заданной неявно. Формула Лейбница для производных произведения двух функций.

Понятие дифференциала функции в точке. Геометрический смысл дифференциала. Инвариантность формы первого дифференциала.

Производные и дифференциалы высших порядков функции одной переменной в точке и их свойства.

Понятие об экстремумах функции одной переменной. Точка локального экстремума функции одной переменной. Необходимое условие ее существования (теорема Ферма). Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя.

Многочлен Тейлора и формула Тейлора для функций одной переменной с остаточным членом в формах Пеано и Лагранжа. Формулы Маклорена для основных элементарных функций. Использование формулы Тейлора для представления и приближенного вычисления значений функции.

Достаточное условие строгого возрастания (убывания) функции на промежутке. Достаточные условия точки локального экстремума для функции одной переменной. Выпуклые (вогнутые) функции одной переменной. Достаточные условия выпуклости (вогнутости). Точки перегиба. Необходимые и достаточные условия точки перегиба. Асимптоты графика функции одной переменной. Общая схема исследования функции одной переменной и построение ее графика.

Лит-ра: основная: [1], с. 189-222, с. 224-290.

Тема III. Дифференциальное исчисление функций многих переменных

Арифметическое пространство R^n . Расстояние между точками пространства. Неравенство треугольника. Окрестности точек, предельные и внутренние точки. Связные, несвязные, ограниченные, неограниченные множества. Замкнутые и открытые множества.

Понятие функции многих переменных. Линии равного уровня. Определение предела функции многих переменных. Арифметические свойства пределов. Понятие непрерывности функции многих переменных в точке. Арифметические свойства непрерывных функций. Теорема о непрерывности сложной функции.

Понятие частных производных функции многих переменных в точке. Определение дифференцируемости функции в точке. Связь дифференцируемости функции в точке с непрерывностью и существованием частных производных. Достаточное условие дифференцируемости функции в точке. Арифметические свойства дифференцируемых функций. Теорема о дифференцируемости сложной функции. Касательная плоскость к графику функции двух переменных в точке. Уравнение касательной плоскости.

Дифференциал функции многих переменных в точке. Геометрический смысл первого дифференциала для функции двух переменных. Инвариантность формы первого дифференциала. Градиент функции в точке и производная по направлению. Геометрический смысл градиента функции в точке, его свойства.

Частные производные и дифференциалы высших порядков функции многих переменных. Теорема о равенстве смешанных производных. Многочлен Тейлора. Формула Тейлора для функций многих переменных с остаточным членом в форме Пеано и Лагранжа.



Понятие неявной функции. Теорема о существовании и непрерывности неявной функции, определяемой одним уравнением. Теорема о дифференцируемости неявной функции. Формула для производных неявной функции. Повторное дифференцирование неявной функции. Понятие системы неявных функций, определяемых системой уравнений. Условия их существования и дифференцируемости. Матрица Якоби. Якобиан.

Лит-ра: основная: [1], с.442-504,610-632.

Тема IV. Классические методы оптимизации

Локальный экстремум функций многих переменных. Необходимое условие локального экстремума. Знакоопределенность второго дифференциала. Достаточное условие локального экстремума функции многих переменных. Теорема об экстремуме неявной функции, определяемой уравнением и системой уравнений. Применение в экономических задачах.

Условный экстремум функции многих переменных. Функция Лагранжа и множители Лагранжа для задачи на условный экстремум. Необходимое условие условного экстремума. Исследование достаточных условий условного экстремума. Применение в экономических задачах.

Лит-ра: основная: [1], с. 504-534, 632-638.

Тема V. Интегральное исчисление функции одной переменной

Понятие первообразной функции одной переменной на интервале. Понятие неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла. Интегралы от основных элементарных функций. Табличные интегралы. Замена переменной и формула интегрирования по частям в неопределенном интеграле.

Понятие о рациональной функции. Элементарные (простейшие) дроби I и II рода. Правильные и неправильные рациональные дроби. Выделение из неправильной рациональной дроби целой части в виде многочлена. Интегрирование рациональных функций. Основные классы функций, интегрирование которых сводится к интегрированию рациональных функций. Интегрирование иррациональных функций. Интегрирование тригонометрических функций. Универсальная тригонометрическая подстановка.

Понятие интегральной суммы. Верхняя и нижняя интегральные суммы. Понятие определенного интеграла и его геометрическая интерпретация. Свойства определенного интеграла. Теорема о среднем для определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной и формула интегрирования по частям для определенного интеграла. Площадь криволинейной трапеции. Геометрические приложения определенного интеграла.

Несобственные интегралы 1 и 2 рода. Абсолютная и условная сходимость несобственного интеграла. Признаки сравнения несобственных интегралов от положительных функций.

Лит-ра: основная: [1], с. 291-329, 330-365, 370-382, 431-441.

Тема VI. Интегрирование простейших дифференциальных уравнений

Понятие дифференциального уравнения первого порядка. Понятие общего решения. Задача Коши. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными, однородные, в полных дифференциалах. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Метод вариации произвольной постоянной. Уравнения Бернулли. Экономические задачи, сводящиеся к решению дифференциальных уравнений первого порядка.

Дифференциальные уравнения старших порядков. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка. Экономические задачи, сводящиеся к решению дифференциальных уравнений второго порядка.

Комплексные числа. Геометрическая интерпретация комплексного числа. Действительная и мнимая часть комплексного числа. Модуль и аргумент комплексного числа. Решение квадратных уравнений.

Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Общее решение линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами. Задача Коши. Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида. Линейные разностные уравнения.

Тема VII. Интегрирование функций многих переменных

Понятие двойного интеграла и его геометрическая интерпретация. Свойства двойного интеграла. Сведение двойного интеграла к повторному. Изменение порядка интегрирования. Замена переменных в двойном интеграле. Переход в двойном интеграле к полярным координатам. Якобиан преобразования. Вычисление площади плоской фигуры с помощью двойного интеграла. Геометрические приложения двойного интеграла.

Лит-ра: основная: [1], с. 405-421; [2], с. 117-151.

Тема IX. Числовые, функциональные и степенные ряды

Понятие о числовых рядах. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Сумма ряда. Необходимое условие сходимости ряда. Признаки сравнения для знакопостоянных рядов. Признаки Даламбера и Коши. Интегральный признак Коши. Эталонные ряды с положительными членами. Критерий Коши сходимости ряда. Понятие абсолютной и условной сходимости числового ряда. Признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов.

Функциональные ряды. Область сходимости функционального ряда. Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости степенного ряда. Вычисление радиуса сходимости степенного ряда при помощи признаков Коши и Даламбера. Непрерывность суммы степенного ряда. Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании степенного ряда. Разложение функций в степенные ряды. Ряд Тейлора (Маклорена). Разложение в ряд Маклорена основных элементарных функций.

Лит-ра: основная: [2], с. 7-108, 287-309.

8 Образовательные технологии

На лекционных занятиях предполагается использование мультимедийного оборудования. На семинарских занятиях, а также при выполнении домашних заданий, по усмотрению преподавателя, проводящего семинарские занятия, допускается решение задач с обращением к информационно-коммуникативным технологиям обучения. В частности, возможно обращение на математический сервер с сайта Academia.XXI, обращение к математическим пакетам. Часть предложенной в программе учебной литературы может использоваться в электронном виде.

9 Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

9.1 Тематика заданий текущего и промежуточного контроля

Типовой вариант контрольной работы №1

1. Пользуясь определением предела последовательности, покажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+15}{n-6} = 5$.
Укажите $N(\varepsilon)$.



2. Вычислите пределы:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4-n)^3 - (2-n)^3}{(1-n)^2 - (2+n)^4}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \sqrt[3]{3n^3 + 4} \sqrt[4]{4n^8 + 1}}{(n + \sqrt{n}) \sqrt{7-n+n^2}}$.

3. Пользуясь определением предела функции в точке, обоснуйте равенство, укажите $\delta(\varepsilon)$:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 11x + 15}{x + 3} = -1.$$

4. Вычислите пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}$; б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 + 7x + 5}{x^2 - x - 2}$;

в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^4 + 7x + 2} - \sqrt{x^4 - 3x + 1})$;

г) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{16x-4}}{\sqrt{x+4} - \sqrt{2x}}$; д) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt[4]{16x^4 + 2x^2 + 3}}{\sqrt[3]{x^3 + x}}$.

5. Вычислите пределы, используя первый и второй замечательные пределы, а также свойства эквивалентных бесконечно малых, из них следующие:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{45x^2}{\sin 3x \cdot \sin 5x}$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{6}{x}\right)^{x/2}$;

в) $\lim_{x \rightarrow -1} (4x^2 + 3x - 1) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 2x)}{\sin 6x}$;

д) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\ln x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - 5 \sin^2 x)^{1/x^2}$.

6. Что означает равенство $o(1) + o(1) = o(1)$ при $x \rightarrow 0$? Докажите это утверждение.

7. Докажите, что $o(x^2) \cdot o(x^3) = o(x^5)$ при $x \rightarrow 0$.

8. Укажите все значения γ , при которых $o(x^3) + o(x^5) = o(x^\gamma)$; $x \rightarrow +0$.

9. Не пользуясь ни правилом Лопиталья, ни формулой Тейлора, обоснуйте, что $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$, $x \rightarrow 0$.

10. Вычислите пределы, используя асимптотические формулы:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin 2x - \operatorname{tg} x}{x^3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - \sqrt{1+3x}}{x}$;

в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 7x + 2} - \sqrt{x^2 + 3x + 5})$.

В пунктах а) и б) также вычислите пределы, используя правило Лопиталья.

11. Классифицируйте точки разрыва графика функции:

а) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}$; б) $f(x) = \frac{e^{1/(x-1)}}{x+2}$.

12. Напишите уравнения касательной и нормали к графику функции

$$f(x) = x^4 \text{ в точке с абсциссой } x=2.$$

13. Вычислите производную функции $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x-1}$ в точке $x=5$.

14. Найдите производные следующих функций, не упрощая ответ:

а) $f(x) = e^{\cos x} \cdot (\sqrt[3]{x^5 + \ln x})$; б) $f(x) = \frac{\sin^2(2x^4)}{\sqrt{\operatorname{arctg} 3x^2}}$;

в) $f(x) = \ln \frac{x + \sqrt[4]{x^4 + 1}}{\sqrt[4]{x^4 + 1} - x}$.

15. Вычислите первый и второй дифференциалы функции $f(x) = \sqrt{x+25}$, если $x=0$, $dx=11$.



16. Используя правило логарифмического дифференцирования, вычислите производные следующих функций:
- а) $f(x) = (x^3 + \cos x)^{\sqrt{2x+3}}$; б) $f(x) = (\arcsin \sqrt{x})^{ctg^2 5x}$.
17. Вычислите производную функции $y(x)$, заданной неявно уравнением
- $$5x^2 + 5xy + 3y^2 - 3x - 2y - 2 = 0.$$
18. Вычислите производную $y'(x)$ функции $y(x)$, заданной параметрически: $x(t) = \ln t g t$, $y(t) = \frac{1}{\sin^2 t}$, $0 < t < \pi/2$ при значении параметра $t_0 = \pi/4$.
19. Постройте график функции $f(x) = x^3(2x - 1)^2$ с помощью производной первого порядка.

Типовой вариант №2 контрольной работы №1

1. Вычислите предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2+1+6n}}{\sqrt[5]{n^5+n+1}}$.
2. Пользуясь определением предела функции в точке, обоснуйте равенство, укажите $\delta(\varepsilon)$:
 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-2x-8}{x-4} = 6$.
3. Вычислите пределы:
- а) $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{\arctg(x-1)})^{\arcsin x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+2x^2-3x}{x^2-3x+2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 27} \frac{\sqrt[3]{x-3}}{4-\sqrt{x-11}}$.
4. Вычислите пределы, используя первый и второй замечательные пределы, а также свойства эквивалентных бесконечно малых, из них следующие:
- а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^3+x^2)}{\arctg(x^3-x^2)}$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x+5}\right)^{3x}$;
в) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tg^2 x)^{1/x^2}$.
5. Укажите все значения γ , при которых $o(x^3) + o(x^8) = o(x^\gamma)$; $x \rightarrow +0$.
6. Вычислите предел, используя асимптотические формулы:
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \sqrt{1+4x} - e^{5x}}{x}$.
7. Вычислите предел, используя правило Лопиталя: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \ln(1+5x) - 1}{x - \sin x}$.
8. Классифицируйте точки разрыва графика функции: $f(x) = \frac{x^2-9}{x(x+1)}$.
9. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2x \cdot e^{-x}$ в точке $x = 0$.
10. Вычислите производную функции $f(x) = \arctg 3x$ в точке $x = 2$.
11. Найдите производные следующих функций, не упрощая ответ:
- а) $f(x) = (3^{-x} + x^3) \tg 4x$; б) $f(x) = (\sqrt{x} \cdot \ln \cos x + \sqrt{8x-1})^4$.
12. Вычислите первый и второй дифференциалы $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, если $x = 1000$, $dx = 2$.
13. Используя правило логарифмического дифференцирования, вычислите производную функции $f(x) = (\sqrt{3x-5} + \arcsin 3x)^{\ln(2x+3)}$.
14. Вычислите производную функции $y(x)$, заданной неявно уравнением
- $$12x^3 - 5x^2 + 3xy + y^2 - 3x + y - 2 = 0.$$
15. Вычислите производную $y'(x)$ функции $y(x)$, заданной параметрически:
 $x(t) = \frac{t+2}{t^2}$; $y(t) = \sqrt{t^3+1}$ при значении параметра $t_0 = 2$.
16. Постройте график функции $f(x) = \sqrt{x^2-9}$ с помощью производной первого порядка.



Типовой вариант контрольной работы №2

1. Изобразите линии равного уровня функции $u(x; y) = \min(x^2 + y^2; 1 - 2xy)$.
2. Вычислите первый полный дифференциал функции $f(x, y, z) = \frac{x-y}{x+y+z}$ в точке $M_0(1, 2, 1)$. В этой точке найдите вектор градиента и производную по направлению вектора $\vec{l} = (3; -4; 0)$.
3. Исследуйте на экстремум функцию $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2$.
4. Исследуйте на экстремум функцию $f(x, y) = x + y$ при условии $x^2 + y^2 = 2x$.
5. Найдите производные сложной функции, если $u = \frac{x}{y+4t}$; $x = tv^2$; $y = \frac{v}{t^3}$; $\frac{\partial u}{\partial v} = ?$
 $\frac{\partial u}{\partial t} = ?$
6. Найдите Z''_{xy} в точке $M_0(2, 0, 0)$ для функции, заданной неявно уравнением $z - x^2 + e^{y+z} = 0$.
7. Вычислите производные y'_x и y''_{xx} функции $y(x)$, заданной параметрически: $x = t + \sin t$; $y = 3 - \cos t$. Вычислите y'_x и y''_{xx} при $t = 0$.
8. Найдите n -ую производную функции: $f(x) = (2x + 1)^2 \cdot \sin 4\pi x$. Укажите значение $f^{(5)}(1)$.
9. Вычислите предел с помощью правила Лопиталья: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt[3]{4x^2 + 5x + 1}}{x^2 + 2x - 8}$.
10. Вычислите предел с помощью асимптотических формул:
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot e^{-2x} - \ln(1 + 3x) + 2 \sin x}{\sqrt{1 + 4x^2} + \cos 3x - 2}$.
11. Проведите полное исследование и постройте график функции $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$.

Типовой вариант контрольной работы №3

Вычислите интегралы:

1. $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx$. 2. $\int \frac{dx}{1 + \cos^2 x}$. 3. $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x^4} dx$ 4. $\int \frac{3x^2 + 8x + 6}{(x^2 + 16)(x + 5)} dx$.
5. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 + 4x + 1$, $y = x - 1 - 0$.
6. $y' = \frac{(e^x + 3)tg^2 4y}{e^x}$.
7. $x y' - y = \sqrt{y^2 - 8x^2}$.
8. $x^2 y' - 4x^2 - y^2 = 3xy$, $y(1) = 0$.
9. $x y' + y = y^2 \ln x$.
10. Исследуйте на экстремум функцию $f(x, y) = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y$.
11. Исследуйте на экстремум функцию $f(x, y) = x + y$ при условии $x^2 = 2y$.



12. Найдите частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ для каждой функции, заданной неявно уравнением $2x^2 + 2y^2 + f^2 + 8fy - f + 8 = 0$. Исследуйте эту функцию на экстремум. Найдите вектор градиента и производную функции f по направлению вектора $\vec{l} = \left(-\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$ в точке $A(0; -2)$.

Типовой вариант контрольной работы №4

Найдите решения дифференциальных уравнений:

- $y' = 2\sqrt{\frac{x}{y^3}} - \frac{y}{x}$.
- $x y' = 3y + \frac{x^4}{1+x^2}, y(1) = \frac{\ln 2}{2}$.
- $y''y = 2(y')^2, y(0) = 1, y'(0) = 1$.
- $x + y''\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
- Решите задачу Коши $y'' - 2y' + 5y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -7$ и вычислите для решения этой задачи значение $y\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Исследуйте на сходимость несобственные интегралы

6. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{5\sqrt{x^4+x^5}\sqrt{x+\ln(\cos x+2)}}; \int_0^1 \frac{dx}{4\sqrt{\operatorname{tg} x^6+x^3}\sqrt{\ln(1+2\sin 3x)}}$.

Вычислите (с полным объяснением) несобственный интеграл

7. $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^3-3x^2-4x+12}$.

8. Исследуйте на сходимость числовые ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+4}}{3n^2+\sqrt[3]{n^8}-1}; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n^2}; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)\sqrt{(n+1)^2+1}}; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n2^n+3}$$

9. Исследуйте на сходимость знакопеременные числовые ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4}{(-3)^n}; \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{2n}$$

10. Найдите область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 x^n}{5^{n+1}}$.

11. Вычислите двойной интеграл

$$\iint_D xy \, dx \, dy, \quad D = \{(x; y): 0 \leq x \leq 2, \quad 2 - \sqrt{4-x^2} \leq y \leq 2\}.$$



9.2 Тематика заданий итогового контроля

Экзаменационная контрольная работа по математическому анализу

ВАРИАНТ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ

Найдите производные функций (ответ не упрощайте)

1. $f(x) = \operatorname{arctg} \left(4 \ln^5 (\operatorname{ctg} \sqrt{x}) \right)$; $f(x) = \left(\sqrt{3^{-x} \operatorname{arctg} 4x + \sqrt[3]{2x}} \right)^{5 \sin(x^2)}$.

2. Вычислите производные y'_x и y''_{xx} функции $y(x)$, заданной параметрически: $x = \cos 4t$; $y = 3 - \cos 2t$. Вычислите y'_x и y''_{xx} при $t = \frac{\pi}{8}$.

3. Вычислите пределы

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot e^{-2x} - \ln(1+3x) + 2 \sin x}{\sqrt{1+4x^2} + \cos 3x - 2}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt[3]{4x^2 + 5x + 1}}{x^2 + 2x - 8}.$$

3. Исследуйте на экстремум функцию $f(x; y) = e^{2y}(y + x^2 + x)$.

5. Исследуйте на экстремум функцию $f(x; y) = x^2 + xy + 3y^2 + 5$ при условии $x + y = 4$.

6. Найдите производные функции $u(x; y; z) = x^3 + y^2 - yz + 2yz$ в точке $M_0(1; 0; 2)$ по направлению вектора M_0M , если $M(-1; -1; 0)$, а также производную в точке M_0 по направлению градиента.

7. Найдите решение уравнения

$$(3x^2 + y \cos(xy))dx + (4y^3 + 3x \cos(xy))dy = 0.$$

Вычислите интегралы

8. $\int_0^1 \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$. 9. $\int_0^{\ln 2} e^x \sin e^x dx$. 10. $\int_1^e \ln^3 x dx$.

11. Вычислите несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{x^2-1}{(x^3+4x^2+4x)} dx$.

12. Исследуйте на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arcsin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} n^4 + n^5 \sqrt{n^2 + \sin n}}}$; исследуйте на

сходимость несобственный интеграл $\int_0^{0,1} \frac{\operatorname{tg}(\sqrt{x}) dx}{\sqrt[5]{\ln(1 + \sin^6 2x) + x^5 \cdot \sqrt{\arcsin x^3 + x^3}}}$.

13. Вычислите двойной интеграл

$$\iint_D \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dx dy, \quad D = \left\{ x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 \leq 9, y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}, y \leq x\sqrt{3} \right\}.$$

Решите уравнения

14. $y' + y \operatorname{tg} x - \cos^4 x = 0$, $y(0) = 1$.

15. $(x + 3y)dx = (x - y)dy$.

16. $y' - 4xy = e^{2x^2+x}$.

17. $xy' + y = y^2 \ln x$.

Решите задачи Коши

18. $yy'' + 5y^4(y')^4 = 3(y')^2$, $y(-2) = -1$, $y'(-2) = 1$.



19. $xy^2y'' + 5x^4(y')^3 = 3y^2y' + xy(y')^2$, $y(-2) = -4$, $y'(-2) = 1$.

20. Решите задачу Коши $y'' + 4y' + 5y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$ и вычислите для решения этой задачи значение $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

10 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

10.1 Базовый учебник

[1] Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ 1. М.: Изд-во Моск. Ун-та, 2004.

[2] Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ 2. М.: Изд-во Моск. Ун-та, 2004.

10.2 Основная литература

[1] Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ 1. М.: Изд-во Моск. Ун-та, 2004.

[2] Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ 2. М.: Изд-во Моск. Ун-та, 2004.

[3] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Астрель, 2002.

[4] Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. М.: Физматлит, 2003.

10.3 Дополнительная литература

[1] Кудрявцев Л.Д. Математический анализ в двух томах. М.: Дрофа, 2006.

[2] Егоров В.И., Салимова А.Ф. Определенный и кратные интегралы. Элементы теории поля. – М.: Физматлит, 2004.

[3] Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям – М.: Наука, 2000.

[4] Математический анализ. Примеры и задачи / под ред. А.Ф. Салимовой, Ч.1. М.: ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», 2010.

[5] Математический анализ. Примеры и задачи / под ред. А.Ф. Салимовой, Ч.2. М.: ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», 2010.

[6] Математический анализ. Примеры и задачи / под ред. А.Ф. Салимовой, Ч.3. М.: ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», 2011.