



**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
"Национальный исследовательский университет  
"Высшая школа экономики"**

Московский институт электроники и математики  
Департамент прикладной математики

**Рабочая программа дисциплины  
Асимптотические методы исследования нелинейных процессов**

для образовательной программы «Прикладная математика»  
направления подготовки 01.03.04 «Прикладная математика»  
уровень «бакалавр»

Разработчик(и) программы  
Данилов В.Г., д.ф.-м.н., профессор, [vgdanilov@hse.ru](mailto:vgdanilov@hse.ru).

Одобрена на заседании департамента прикладной математики  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 2017 г.

Руководитель департамента  
А.В. Белов \_\_\_\_\_

Утверждена Академическим советом образовательной программы  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 2017 г., № протокола \_\_\_\_\_

Академический руководитель образовательной программы  
Е.А. Буровский \_\_\_\_\_

Москва, 2017

*Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями университета  
и другими вузами без разрешения подразделения-разработчика программы.*



## 1 Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает требования к образовательным результатам и результатам обучения студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих дисциплину «Асимптотические методы исследования нелинейных процессов», учебных ассистентов и студентов направления подготовки 01.03.04 «Прикладная математика», обучающихся по образовательной программе «Прикладная математика».

Программа учебной дисциплины разработана в соответствии с:

- ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.04 «Прикладная математика» (уровень бакалавриата), утвержденный 12.03.2015 (приказ Минобрнауки России №208);
- Образовательной программой «Прикладная математика» направления подготовки 01.03.04 «Прикладная математика»;
- Объединенным учебным планом университета по образовательной программе «Прикладная математика», утвержденным в 2017 г.

## 2 Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Асимптотические методы исследования нелинейных процессов» является знакомство с основными типами решений нелинейных уравнений и методами их конструктивного исследования.

## 3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

| Компетенция                                     | Код по ФГОС ВО | Уровень формирования компетенции | Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата) | Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции | Форма контроля уровня сформированности компетенции |
|---|----------------|----------------------------------|---|---|--|
| Способность к самоорганизации и самообразованию | ОК-7           | РБ                               | Владеет навыками поиска специальной литературы.                             | Формируется в течение всего учебного процесса                               | Все предусмотренные программой формы контроля      |
| Готовность к самостоятельной работе             | ОПК-1          | РБ                               | Применяет изученные методы на практике.                                     | Формируется в течение всего учебного процесса                               | Все предусмотренные программой формы контроля      |



| Компетенция   | Код по ФГОС ВО | Уровень формирования компетенции | Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)   | Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции | Форма контроля уровня сформированности компетенции |
|---|----------------|----------------------------------|---|---|--|
| Способность использовать современные математические методы и современные прикладные программные средства и осваивать современные технологии программирования  | ОПК-2          | РБ                               | Дает определение используемых понятий. Использует изученные термины и понятия. Владеет изученными математическими методами и применяет их к практическим задачам. Обосновывает полученные результаты. | Формируется в течение всего учебного процесса                               | Все предусмотренные программой формы контроля      |
| Способность выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, готовность использовать для их решения соответствующий естественнонаучный аппарат  | ПК-9           | РБ                               | Распознает тип поставленной задачи. Демонстрирует умение выбора правильного метода решения.   | Формируется в течение всего учебного процесса                               | Все предусмотренные программой формы контроля      |
| Готовность применять математический аппарат для решения поставленных задач, способность применить соответствующую процессу математическую модель и проверить ее адекватность, провести анализ результатов моделирования, принять решение на основе полученных результатов | ПК-10          | СД                               | Дает определение используемых понятий. Распознает тип задачи и применяет соответствующий метод ее решения. Обосновывает, интерпретирует и оценивает полученные результаты.                            | Формируется в течение всего учебного процесса                               | Все предусмотренные программой формы контроля      |
| Способность самостоятельно изучать новые разделы фундаментальных наук   | ПК-11          | РБ                               | Владеет навыками поиска специальной литературы и применяет полученные знания на практике.   | Формируется в течение всего учебного процесса                               | Все предусмотренные программой формы контроля      |



В результате освоения дисциплины студент должен:

**Знать:**

- основные типы решений нелинейных уравнений;
- свойства уравнений, приводящие к тому или иному типу решений;
- определения обобщенных решений;
- связь между асимптотиками и решениями предельных задач.

**Уметь:**

- строить осциллирующие и стабилизирующиеся асимптотические решения;
- строить решения, описывающие взаимодействие нелинейных волн.

**Иметь навыки** исследования нелинейных математических моделей.

#### 4 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина относится к блоку дисциплин специализации «Математические и компьютерные методы для высоких технологий» вариативной части профессионального цикла.

Изучение данной дисциплины базируется на следующих дисциплинах:

- Математический анализ
- Дифференциальные уравнения
- Уравнения математической физики
- Функциональный анализ

Для освоения учебной дисциплины студенты должны владеть следующими знаниями и компетенциями:

- знать и уметь использовать основные разделы математического анализа;
- владеть навыками решения и анализа основных типов обыкновенных дифференциальных уравнений;
- знать основы функционального анализа;
- знать основные типы и методы решения уравнений математической физики.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при подготовке выпускной квалификационной работы.

#### 5 Тематический план учебной дисциплины

| №  | Название раздела   | Всего часов | Аудиторные часы |          |                      |                    | Самостоятельная работа |
|----|--|-------------|-----------------|----------|----------------------|--------------------|------------------------|
|    |  |             | Лекции          | Семинары | Практические занятия | Другие виды работы |                        |
| 1  | Метод ВКБ  | 12          | 2               | 2        |                      |                    | 8                      |
| 2  | Метод Уизема   | 24          | 4               | 4        |                      |                    | 16                     |
| 3  | Метод Маслова- Уизема построения стабилизирующихся асимптотических решений                               | 20          | 3               | 3        |                      |                    | 14                     |
| 4. | Введение в теорию гиперболических законов сохранения   | 14          | 2               | 2        |                      |                    | 10                     |
| 5. | Вязкая регуляризация гиперболических законов сохранения. Построение асимптотических решений типа ударных | 24          | 4               | 4        |                      |                    | 16                     |



|   |                                |            |           |           |  |  |            |
|---|--------------------------------|------------|-----------|-----------|--|--|------------|
|   | волн.                          |            |           |           |  |  |            |
| 6 | Обобщенные функции             | 28         | 4         | 4         |  |  | 20         |
| 7 | Слабые асимптотические решения | 68         | 11        | 11        |  |  | 46         |
|   | <b>ИТОГО</b>                   | <b>190</b> | <b>30</b> | <b>30</b> |  |  | <b>130</b> |

## 6 Формы контроля знаний студентов

| Тип контроля | Форма контроля     | 1 год |   | Параметры **   |
|--------------|--------------------|-------|---|--|
|              |                    | 1     | 2 |  |
| Текущий      | Контрольная работа | *     |   | Письменная работа 60 минут                                 |
|              | Домашнее задание   |       | * | Самостоятельная работа, выполняется в течение двух недель. |
| Итоговый     | Экзамен            |       | * | Устный экзамен   |

## 7 Критерии оценки знаний, навыков

Студент должен продемонстрировать знание основных понятий и методов исследования нелинейных уравнений, а также уметь применять изученный материал на практике.

Оценки по всем формам текущего контроля выставляются по 10-ти балльной шкале.

## 8 Содержание дисциплины

### Раздел 1 Метод ВКБ

Метод ВКБ с точки зрения метода Уизема на примере линейного уравнения Шредингера с малым параметром. Примеры асимптотических разложений. Уравнение Гамильтона-Якоби как условие разрешимости эталонного уравнения. Уравнение переноса как условие разрешимости уравнения для поправки. Задача Коши для линейного волнового уравнения.

Литература к разделу: [1, Глава 1], [2]

### Раздел 2 Метод Уизема

Метод Уизема на примере нелинейного волнового уравнения (Sin -Гордона). Уравнение Ньютона в случае квадратичного потенциала. Вывод эталонного уравнения и условий его разрешимости. Расцепление условий разрешимости для эталонного уравнения. Уравнение для поправки в случае одномерного коядра. Построение решения уравнения Sin-Gordona. Уравнение для поправки в случае двумерного коядра.

Литература к разделу [2], [6]



### Раздел 3 Метод Маслова-Уизема построения стабилизирующихся асимптотических решений

Метод Маслова- Уизема построения стабилизирующихся асимптотических решений на примере уравнения Кортевега-де Фриза. Основные свойства стабилизирующихся асимптотических решений. Примеры аддитивных и мультипликативных асимптотик. Вывод и исследование эталонного уравнения. Эталонное уравнение для уравнений типа КдФ с выпуклой нелинейностью. Вывод и исследование уравнений для поправки. Уравнений для поправки для уравнений типа КдФ с выпуклой нелинейностью. Двухсолитонное асимптотическое решение до взаимодействия. Уравнение типа КдФ с малой правой частью.

Литература к разделу [3], [6]

### Раздел 4 Введение в теорию гиперболических законов сохранения

Обобщенные решения законов сохранения. Интегральное тождество, вывод условий на скачке. Квадратичный закон сохранения. Построение разрывных решений методом характеристик. Условия разрешимости. Примеры решения задачи Коши.

Литература к разделу [1], [3], [5]

### Раздел 5 Вязкая регуляризация гиперболических законов сохранения. Построение асимптотических решений типа ударных волн.

Уравнение с малым параметром Бюргерса, априорные оценки решения. Замена Хопфа-Коула, примеры построения решений. Построение асимптотических решений типа ударных волн. Вывод эталонного уравнения и условий его разрешимости. Интегрирование эталонного уравнения. Решение эталонного уравнения в случае выпуклой нелинейности. Вывод уравнения для поправки и анализ его разрешимости. Интегральное представление для решения уравнения для поправки. Сшивание решений в и вне окрестности разрыва.

Литература к разделу [1, Глава 3], [2], [5]

### Раздел 6 Обобщенные функции

Обобщенные функции: сходимость в слабом смысле, дифференцирование по параметру. Малые в слабом смысле величины. Примеры обобщенных функций и их свойств. Пример Шварца неассоциативности умножения. Аппроксимации обобщенных функций гладкими, моментные разложения. Примеры обобщенных функций и их аппроксимаций. Разложения аппроксимаций в асимптотические ряды. Асимптотические алгебры обобщенных функций. Алгебры гармонических аппроксимаций.

Литература к разделу [4], [6]



## Раздел 7 Слабые асимптотические решения

Слабые асимптотические решения на примере законов сохранения в случае скачков постоянной величины. Построение решения в случае общего начального условия. Слабая асимптотика взаимодействия ударных волн для одномерного скалярного закона сохранения. Вывод условий на скачке с помощью интегрального тождества. Взаимодействие на переменном фоне. Образование скачка в результате взаимодействия слабых особенностей. Слабая асимптотика распада разрыва. Построение решения в случае общего начального условия. Образование разрыва на подмногообразии коразмерности 1. Решение уравнения для функции, описывающей распад разрыва. Слабая асимптотика взаимодействия солитонов в уравнении типа КдФ: построение анзатца, вывод основных уравнений, изучение их свойств и асимптотик. Сравнение анзатца асимптотического решения с точной формулой для уравнения КдФ. Сравнение уравнений, описывающих решение в интегрируемом и неинтегрируемом случае.

Литература к разделу [3], [6]

## 9 Образовательные технологии

Чтение лекций и проведение семинаров.

## 10 Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

### 10.1 Оценочные средства для оценки качества освоения дисциплины в ходе текущего контроля

Примерный вариант контрольной работы:

1. Построить асимптотическое осциллирующее решение уравнения

$$\varepsilon^2(u_{tt} - u_{xx}) = u - u^3.$$

2. Доказать, что в  $D'(R^1)$  справедливо равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-\frac{(x-a)^2}{\varepsilon}} = c\delta(x-a)$$

и вычислить константу  $c$ .

3. Решить задачу Коши

$$u_t + (3u^2)_x = 0, \quad u|_{t=0} = -x.$$

Примерный вариант домашнего задания

1. Построить асимптотические решения уравнения КдV-Бюргера

$$\varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} \right) = -\varepsilon^\alpha u_{xxx} + \varepsilon^\gamma u_{xx}$$

при различных  $\alpha, \gamma \geq 0$  методом Уизема-Маслова.

2. Взаимодействие устойчивых и неустойчивых скачков для уравнения

$$u_t + f(u)_x = 0.$$

### 10.2 Примеры заданий промежуточной аттестации

Примерный перечень вопросов к экзамену по курсу:

1. Метод Уизема для линейного уравнения Шредингера.
2. Метод Уизема для нелинейного волнового уравнения. Решение эталонного уравнения.



3. Решение уравнения для следующего приближения, случай одномерного коядра.
4. Решение уравнения для следующего приближения, случай двумерного коядра.
5. Стабилизирующиеся асимптотические решения, основные свойства.
6. Вывод эталонного уравнения для уравнения Бюргерса. Условия его разрешимости.
7. Вывод уравнения для поправки и его разрешимость.
8. Сшивание и решение в целом.
9. Обобщенные функции: дифференцирование, дифференцирование по параметру, регуляризация, малость в слабом смысле.
10. Асимптотические алгебры обобщенных функции с однотоочечным и многотоочечным сингулярным носителем.
11. Слабое асимптотическое решение уравнения Хопфа.
12. Слабая асимптотика взаимодействия ударных волн.
13. Слабая асимптотика взаимодействия слабых разрывов, образование скачка.
14. Образование скачка в многомерном случае.
15. Анзатц для слабого асимптотического решения, описывающего взаимодействие солитонов.
16. Слабая асимптотика взаимодействия солитонов. Отличие интегрируемого случая от неинтегрируемого.

## 11 Порядок формирования оценок по дисциплине

Накопленная оценка по дисциплине рассчитывается по формуле:

$$O_{\text{накоп}} = 0.5 * O_{\text{дз}} + 0.5 * O_{\text{кр.}}$$

где  $O_{\text{дз}}$  – оценка за выполненное домашнее задание,  $O_{\text{кр}}$  – оценка за контрольную работу.

В диплом выставляется результирующая оценка по учебной дисциплине.

$$O_{\text{итог}} = 0.5 * O_{\text{накоп}} + 0.5 * O_{\text{экзамен}} .$$

Способ округления результирующей оценки по учебной дисциплине: арифметический.

## 12 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### 12.1 Базовый учебник

1. Уизем Дж. Нелинейные волны, М.: Мир, 1969.

### 12.2 Основная литература

2. Маслов В.П. Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений, М.: Наука, 1987.
3. Маслов В.Р. Асимптотические методы и теория возмущений, М.: Наука, 1988.
4. Гельфанд И.М., Шилев Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними, вып.1, М.: Наука, 1970.
5. Горицкий А.Ю., Кружков С.Н., Чечкин Г.А. Уравнения с частными производными (учебное пособие). М.:Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 1999.

### 12.3 Дополнительная литература

6. Danilov, V. G.; Omel'yanov, G. A.; Shelkovich, V. M. Weak asymptotics method and interaction of nonlinear waves. Asymptotic methods for wave and quantum problems, 33–163, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 208, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.





### **13 Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Не используется.



Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
Программа дисциплины «Асимптотические методы исследования нелинейных процессов»  
для направления 01.03.04 «Прикладная математика» подготовки бакалавра