Правительство Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Факультет Математики

Программа дисциплины Функциональный анализ

для направления 010100.62 "Математика" подготовки бакалавра

Автор программы: Сергеев А.Г., д.ф.-м.н., профессор, sergeev@mi.ras.ru

Рекомендована секцией УМС по математике «___»____________ 2013 г.
Председатель С.М.Хорошкин

Утверждена УС факультета математики «___»_____________2013 г.
Ученый секретарь Ю.М. Бурман _________________________

Москва, 2012

1 Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов направления 010100.62 «Математика» подготовки бакалавра.

Программа разработана в соответствии с:

- ГОС ВПО;
- Образовательной программой 010100.62 «Математика» подготовки бакалавра.
- Рабочим учебным планом университета по направлению 010100.62 «Математика» подготовки бакалавра, специализации Математика, утвержденным в 2012 г.

2 Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины “Функциональный анализ” являются знакомство студентов с базовыми принципами функционального анализа, его приложений и взаимосвязей с другими областями математики и математической физики, а также умение применять эти принципы к конкретным математическим объектам.

3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен:

- Знать основные понятия и теоремы функционального анализа
- Уметь применять технику функционального анализа в различных ситуациях
- Приобрести опыт работы с конкретными примерами абстрактных функционально-аналитических объектов

4 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина относится к циклу общие профессиональные дисциплины и блоку основных дисциплин, обеспечивающих подготовку бакалавра.

5 Тематический план учебной дисциплины

№	Название раздела	Всего часов	Аудиторные часы			Самост оя-тельная работа
			Лекции	Семинары	Практичес кие занятия	
	I-е полугодие (1-й и 2-й модули)	***180***	***32***	***32***		***116***
	Гильбертовы пространства (в том числе, евклидовы и нормированные пространства)	90	16	16		58
	Банаховы пространства	90	16	16		58

	II-е полугодие (3-й и 4-й модули)	***180***	***26***	***30***		***100***
	Ограниченные операторы в банаховых и гильбертовых пространствах	90	13	15		62
	Спектральная теорема для ограниченных и неограниченных операторов	90	13	15		62
	Итого:	**360**	**58**	**62**		**240**

Тип контроля	Форма контроля	1 год				Параметры **
		1	2	3	4	
Текущий (неделя)	Контрольная работа	8	8	9	9	Письменная работа 90 минут
Промежу-точный	Зачет	v		v		Письменная работа 180 минут
Итоговый	Экзамен		v		v	Устный экзамен

4 контрольных работ

5.1 Критерии оценки знаний, навыков

Контрольная работа: студент должен продемонстрировать умение решать задачи по материалу, пройденному к моменту написания контрольной.

Зачет: студент должен знать основные определения и формулировки основных теорем и продемонстрировать умение решать задачи по пройденному материалу.

Экзамен: студент должен знать основные определения, примеры, формулировки и доказательства основных теорем.

Оценки по всем формам текущего контроля выставляются по 10-ти балльной шкале.

6 Содержание дисциплины

1. Гильбертовы пространства

1.1. Евклидовы и нормированные пространства

Содержание лекций. Евклидовы пространства (в том числе, ортогональные системы, теорема Пифагора и неравенство Бесселя, неравенство Коши-Буняковского), нормированные пространства (в том числе, связь с евклидовыми пространствами, ограниченные линейные операторы), элементы теории меры и интеграла Лебега (борелевские множества, измеримые функции, теоремы о монотонной и мажорированной сходимости, теорема Рисса-Фишера).

Содержание семинаров. Изучение свойств конкретных евклидовых и нормированных пространств. Задачи на использование свойств меру и интеграла Лебега.

Количество часов аудиторной работы: лекции – 4, семинары – 4, самостоятельная работа – 14.

1.2. Гильбертовы пространства

Содержание лекций. Примеры гильбертовых пространств (в том числе, унитарные операторы, прямая сумма), ортогональное дополнение (в том числе, теорема об ортогональной проекции), сопряженное пространство (в том числе, теорема Рисса, представление полуторалинейных форм линейными операторами).

Содержание семинаров. Изучение свойств конкретных гильбертовых пространств и линейных функционалов на них.
Количество часов аудиторной работы: лекции – 8, семинары – 8, самостоятельная работа – 18.

1.3. Ортогональные базисы

Содержание лекций. Ортонормированные базисы (в том числе, лемма Цорна, существование ортонормированного базиса), разложения по ортонормированным базисам (в том числе, равенство Парсеваля, процесс ортогонализации Грамма-Шмидта), сепарабельные гильбертовы пространства (в том числе, стандартная модель сепарабельного гильбертова пространства, ряд Фурье периодической функции), тензорные произведения гильбертовых пространств (в том числе, конструкция фоковских пространств).
Содержание семинаров. Задачи на разложения функций в конкретных гильбертовых пространствах по конкретным ортогональным базисам. Знакомство с тензорными произведениями гильбертовых пространств.
Количество часов аудиторной работы: лекции – 8, семинары – 8, самостоятельная работа – 18.

Литература по разделу: 1,2,3,5,6,,8,9,11

2. Банаховы пространства

2.1. Интеграл Лебега-Стилтьеса и абстрактная теория меры

Содержание лекций. Меры Лебега-Стилтьеса (в том числе, мера Дирака и канторова лестница), борелевские меры на вещественной оси (в том числе, атомарные, абсолютно непрерывные и сингулярные меры, теорема Лебега о разложении), пространства с мерой (в том числе, измеримые отображения, теоремы о монотонной и мажорированной сходимости, теорема Рисса-Фишера, теорема Лебега о разложении), произведения мер (в том числе, теорема о произведении мер и теорема Фубини).
Содержание семинаров. Вычисление конкретных примеров интегралов Лебега-Стилтьеса и исследование конкретных мер.
Количество часов аудиторной работы: лекции – 4, семинары – 4, самостоятельная работа – 14.

2.2. Начальные сведения о банаховых пространствах

Содержание лекций. Примеры банаховых пространств (в том числе, пространства ограниченных и интегрируемых функций, пространства последовательностей), ограниченные линейные операторы (в том числе, теорема о полноте пространства ограниченных линейных операторов, изометрии), сопряженное пространство (в том числе, второе сопряженное пространство, рефлексивные пространства).
Содержание семинаров. Изучение конкретных примеров банаховых пространств и сопряженных пространств.
Количество часов аудиторной работы: лекции – 8, семинары – 8, самостоятельная работа – 18.

2.3. Основные теоремы о банаховых пространствах

Содержание лекций. Теорема Хана-Банаха (в том числе, теорема Хана-Банаха для комплексного случая, следствия из теоремы Хана-Банаха), операции над банаховыми пространствами (в том числе, прямая сумма, фактор-пространство), принцип равномерной ограниченности (в том числе, теорема Бэра о категории, теорема Банаха-Штейнгауза), теоремы об открытом и обратном отображении, теорема о замкнутом графике (в том числе, теорема Хеллингера-Теплица), слабые топологии на банаховых пространствах (в том числе, теорема Тихонова о компактности, теорема о слабой компактности единичного шара в сопряженном пространстве)

Содержание семинаров. Задачи на продолжение ограниченных линейных функционалов и применение теорем Банаха-Штейнгауза. Изучение слабых топологий в конкретных банаховых пространствах.
Количество часов аудиторной работы: лекции – 8, семинары – 8, самостоятельная работа – 18.

Литература по разделу: 1,2,3,5,6,7,9

3. Ограниченные операторы в банаховых и гильбертовых пространствах

3.1. Пространства линейных ограниченных операторов

Содержание лекций. Топологии в пространствах ограниченных операторов (в том числе, сильная и операторная топологии, слабая сходимость операторов в гильбертовом пространстве), сопряженные операторы (в том числе, банаховы и гильбертовы сопряженные операторы, самосопряженные операторы), ортогональные проекторы.
Содержание семинаров. Задачи на изучение различных топологий в конкретных пространствах ограниченных операторов компактность. Примеры конкретных самосопряженных операторов и ортогональных проекторов.
Количество часов аудиторной работы: лекции – 4, семинары – 8, самостоятельная работа – 14.

3.2. Спектр ограниченного оператора

Содержание лекций. Начальная классификация спектров (в том числе, собственные значения и собственные векторы, точечный и остаточный спектр, резольветное множество), резольвента ограниченного оператора (в том числе, аналитические функции со значениями в гильбертовом пространстве, теорема о резольвенте, спектральный радиус), спектр сопряженного оператора (в том числе, спектр самосопряженного оператора), полярное разложение (в том числе, самопряженность положительного оператора, теорема о квадратном корне, частично изометрические операторы, теорема о полярном разложении.
Содержание семинаров. Исследование спектров линейных операторов в конкретных банаховых и гильбертовых пространствах.
Количество часов аудиторной работы: лекции – 8, семинары – 8, самостоятельная работа – 18.

3.3. Компактные операторы

Содержание лекций. Примеры компактных операторов (в том числе, интегральные операторы, операторы конечного ранга), сходимость компактных операторов (в том числе, приближение компактных операторов операторами конечного ранга), альтернатива Фредгольма (в том числе, аналитическая теорема Фредгольма), каноническая форма компактного оператора (в том числе, теорема Гильберта-Шмидта, приложение к задаче Дирихле), идеалы в алгебре компактных операторов (в том числе, ядерные операторы, операторы Гильберта-Шмидта).
Содержание семинаров. Исследование конкретных примеров компактных операторов, в том числе интегральных.
Количество часов аудиторной работы: лекции – 8, семинары – 8, самостоятельная работа – 18.

Литература по разделу: 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11

4. Спектральная теорема для ограниченных и неограниченных операторов

4.1. Функциональное исчисление и спектральные меры

Содержание лекций. Функциональное исчисление непрерывных функций (в том числе, теорема Стоуна-Вейерштрасса), спектральные меры (в том числе, функциональное исчисление ограниченных функций).
Содержание семинаров. Исследование конкретных примеров спектральных мер.
Количество часов аудиторной работы: лекции – 4, семинары – 4, самостоятельная работа – 10.

4.2. Спектральная теорема для ограниченных операторов

Содержание лекций. Спектральная теорема в терминах оператора умножения (в том числе, циклические векторы), спектральные меры (в том числе, классификация спектров, операторы с простым спектром, спектральная теорема о кратности) спектральные проекторы (в том числе, проекторнозначные меры, спектральная теорема в терминах проекторнозначных мер, существенный спектр оператора).
Содержание семинаров. Задачи на спектральные разложения конкретных операторов в конкретных гильбертовых пространствах. Исследование спектров конкретных операторов.
Количество часов аудиторной работы: лекции – 4, семинары – 4, самостоятельная работа – 10.

4.3. **Неограниченные операторы.**

Содержание лекций. Неограниченные операторы в гильбертовом пространстве (в том числе, область определения неограниченного оператора, график, замыкание и расширение), сопряженный оператор (в том числе, критерий замыкаемости), резольвента (в том числе, резольвентное множество), симметрические операторы (в том числе, самосопряженные операторы, критерий самосопряженности), примеры неограниченных самосопряженных операторов.
Содержание семинаров. Исследование конкретных примеров неограниченных симметрических и самосопряженных операторов.
Количество часов аудиторной работы: лекции – 6, семинары – 6, самостоятельная работа – 15.

4.4. Спектральная теорема для неограниченных операторов

Содержание лекций. Спектральная теорема в терминах оператора умножения (в том числе, существенная область определения), спектральная теорема в терминах функционального исчисления, спектральная теорема в терминах проекторнозначных мер, полугруппы операторов (в том числе, экспонента самосопряженного оператора, теорема Стоуна).
Содержание семинаров. Спектральные разложения конкретных неограниченных самосопряженных операторов.
Количество часов аудиторной работы: лекции – 6, семинары – 6, самостоятельная работа – 15.

Литература по разделу: 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11

7 Образовательные технологии

Индивидуальное обсуждение со студентами задач из общего списка (листка). Разбор отдельных задач на доске. Устные доклады студентов по темам, не затронутым на лекции.

8 Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

8.1 Тематика заданий текущего контроля

Примерные вопросы/ задания для контрольных работ

1. Задача на вычисление нормы линейного оператора

2. Задача на проверку полноты нормированного пространства
3. Задача на проверку эквивалентности норм
4. Задача на вычисление расстояний в гильбертовом пространстве
5. Задача на ортогонализацию в гильбертовом пространстве
6. Задача на проверку рефлексивности банахова пространства
7. Задача на нахождение сопряженного оператора
8. Задача на вычисление спектра (точечного, непрерывного, остаточного) линейного оператора
9. Задача на проверку компактности линейного оператора
10. Задача на нахождение существенного спектра линейного оператора
11. Задача на явное описание непрерывного и борелевского исчислений для линейного оператора
12. Задача на полярное разложение линейного оператора
13. Задача на нахождение спектральной меры линейного оператора

8.2 Вопросы для оценки качества освоения дисциплины

Примерный перечень вопросов к экзамену по всему курсу

1. Евклидовы пространства, теорема Пифагора и неравенство Бесселя.
2. Нормированные пространства, ограниченные линейные операторы и их примеры.
3. Гильбертовы пространства
4. Ортогональное дополнение и теорема об ортогональной проекции.
5. Теорема Рисса и ее следствия.
6. Представление полуторалинейных форм операторами.
7. Существование ортонормированных базисов.
8. Разложения по ортонормированным базисам. Теорема Парсеваля.
9. Ортогонализация Грамма-Шмидта. Стандартная модель сепарабельного гильбертова пространства.
10. Тензорные произведения гильбертовых пространств. Фоковское пространство.
11. Полнота пространства ограниченных линейных операторов в банаховых пространствах.
12. Рефлексивные банаховы пространства.
13. Теорема Хана-Банаха и ее следствия.
14. Теорема Банаха-Штейнгауза и ее следствия.
15. Теоремы об открытом отображении и об обратном операторе
16. Теорема о замкнутом графике и теорема Хеллингера-Теплица.
17. Резольвента. Классификация спектров. Спектральный радиус.
18. Полярное разложение.
19. Основные свойства компактных операторов. Компактность сопряженного оператора. Компактность интегрального оператора.
20. Идеалы в алгебре компактных операторов.
21. Аналитическая теорема Фредгольма. Альтернатива Фредгольма.
22. Теорема Гильберта-Шмидта.
23. Слабая топология. Слабая компактность единичного шара в сопряженном пространстве.
24. Спектральная теорема для ограниченных операторов а терминах оператора умножения.
25. Спектральная теорема в терминах проекторнозначных мер.
26. Неограниченные операторы (область определения, замыкания и расширения, график оператор оператора).
27. Оператор, сопряженный к неограниченному. Симметрические и самосопряженные операторы.

28. Спектральная теорема для неограниченных операторов в терминах оператора умножения.
29. Спектральная теорема в терминах функционального исчисления.
30. Спектральная теорема в терминах проекторнозначных мер.

9 Порядок формирования оценок по дисциплине

Оценка за текущий, промежуточный и итоговый контроль выставляется по 10-балльной системе.

Результирующая оценка за текущий контроль учитывает результаты студента по текущему контролю следующим образом:

$O_{текущий} = n_{1}{*}\, O_{к/р} + n_{3}{*}\, O_{сам.\ работа}$

Преподаватель оценивает самостоятельную работу студентов**:** правильность выполнения домашних работ, задания для которых выдаются на семинарских занятиях, правильность решения задач на семинаре. Оценки за самостоятельную работу студента преподаватель выставляет в рабочую ведомость. Накопленная оценка - $O_{сам.\ работа}$ определяется перед промежуточным (итоговым) контролем.

Сумма удельных весов должна быть равна единице: $\sum n_i = 1$ Способ округления накопленной оценки текущего контроля в пользу студента.

Результирующая оценка за промежуточный (итоговый) контроль складывается из результатов накопленной результирующей оценки за текущий контроль, удельный вес которой составляет $k_1 = 0{,}5$ и оценки за экзамен/зачет, удельный вес $k_2 = 0{,}5$.

$O_{промежуточный/итоговый} = 0{,}5 * O_{текущий} + 0{,}5 * O_{зачет/экзамен}$

Способ округления накопленной оценки промежуточного (итогового) контроля в форме зачета/экзамена в пользу студента.

Студент может получить возможность пересдать низкие результаты за текущий контроль.

10 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

10.1 Базовый учебник

1. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.

10.2 Основная литература

2. Кириллов А. А. Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1988.
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
4. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
5. Хелемский А.Я. Лекции и упражнения по функциональному анализу. М.: МЦНМО, 2004.

10.3 Дополнительная литература

6. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.
7. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Спектральная теория. М.: Мир, 1966.
8. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
9. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
10. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Мир, 1978.
11. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. М.: Мир, 1970.