Правительство Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Факультет Математики

Программа дисциплины Логика и алгоритмы

для направления 010100.62 "Математика" подготовки бакалавра

Автор программы: Шехтман В.Б., д.ф-м.н, старший научный сотрудник, shehtman@netscape.net

Одобрена на заседании кафедры Геометрии и топологии «___»____________ 2015 г.
Зав. кафедрой В.А. Васильев

Рекомендована секцией УМС по математике «___»____________ 2015 г.
Председатель С.К.Ландо

Утверждена УС факультета математики«___»_____________2015 г.
Ученый секретарь Ю.М. Бурман ________________________

Москва, 2015

1 Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов направления 010100.62 «Математика» подготовки бакалавра.

Программа разработана в соответствии с:

- Стандартом НИУ для направления 010100.62 «Математика» подготовки бакалавра;
- Рабочим учебным планом университета по направлению 010100.62 «Математика» подготовки бакалавра, специализации Математика, утвержденным в 2010 г.

2 Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины Логика и алгоритмы являются

- получение представления об основных структурах, объектах и задачах математической логики и теории алгоритмов;
- получение знания об основных результатах классической математической логики и теории алгоритмов;
- получение представления о методах работы с формализованными логическими теориями;
- развитие логической и алгоритмической интуиции.

3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен:

- Владеть основными методами преобразования логических выражений.
- Владеть основными понятиями теории множеств.
- Уметь записывать содержательные математические утверждения в языке исчисления предикатов.
- Владеть методами доказательства теорем в исчислении высказываний и исчислении предикатов.
- Владеть основными понятиями теории алгоритмов: вычислимость, разрешимость, перечислимость.
- Уметь строить модели формул и теорий первого порядка.
- Уметь реализовывать простые алгоритмы с помощью машин Тьюринга.
- Знать важнейшие теоремы классической теории алгоритмов.
- Уметь решать простые задачи о неразрешимости алгоритмических проблем.

В результате освоения дисциплины студент осваивает следующие компетенции:

Компетенция	Код по ФГОС/ НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
умение формулировать результат	ПК-3	Правильно воспроизводит чужие результаты Правильно формулирует собственные результаты	Компетенция формируется в любом сегменте учебного процесса Формируется в процессе активных занятий (участие в семинарах, выполнение курсовых и дипломных работ).
умение строго доказать утверждение	ПК-4	Воспроизводит доказательства стандартных результатов, услышанных на лекциях Оценивает строгость математических текстов	Изучение базового курса За счет повышения логической и математической культуры в процессе обучения
умение грамотно пользоваться языком предметной области	ПК-7	Распознает и воспроизводит имена основных логических и алгоритмических понятий, возникающих при изучении данного раздела Владеет и свободно использует профессиональную логико-математическую лексику	Продумывание и повторение услышанного на лекции. Компетенция достигается в процессе накопления опыта математических рассуждений, общения с преподавателями.
выделение главных смысловых аспектов в доказательствах	ПК-16	Понимает и воспроизводит основную структуру доказательств теорем из курса Обосновывает и оценивает логические ходы в произвольных математических рассуждениях и конструкциях	Продумывание ключевых моментов лекций Вырабатывается путем активного решения задач, самообразования, общения с преподавателями.

4 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Для специализации математика настоящая дисциплина является базовой, относится к математическому и естественнонаучному циклу.

Для освоения учебной дисциплины, студенты должны владеть следующими знаниями и компетенциями:

Из школьного курса математики: элементы теории множеств, аксиоматический метод построения геометрии, курс алгебры

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

математический анализ, алгебра, топология.

5 Тематический план учебной дисциплины

№	Название раздела	Всего часов	Аудиторные часы			Самостоятельная работа
			Лекции	Семинары	Практические занятия	
1	Логика высказываний и элементы теории множеств		8	8		34
2	Логика предикатов		12	12		32
3	Теория алгоритмов		12	12		32
	Итого:	**162**	**32**	**32**		**98**

6 Формы контроля знаний студентов

Тип контроля	Форма контроля	1 год				Параметры **
		1	2	3	4	
Текущий (неделя)	Контрольная работа	8				Например: письменная работа 60 минут
	Коллоквиум		8			
Промежуточный	Зачет	v				
Итоговый	Экзамен		v			Например: письменный экзамен 90 мин.

6.1 Критерии оценки знаний, навыков

Оценки по всем формам текущего контроля выставляются по 10-ти балльной шкале.

Главная форма контроля - сдача задач из текущих листочков(15-20 задач по каждой теме).

Контрольная работа: студент должен продемонстрировать умение пользоваться основными техническими приемами и методами доказательств, которые используются в изученном разделе математической логики. Предлагается 6 задач на 90 минут.

Экзамен (зачет): письменная работа, состоящая из 6-10 задач на 4 часа. Преобладают задачи, требующие хорошего знания теоретического материала и практических навыков (компетенции – умения и владения)

Оценки по всем формам текущего контроля выставляются по 10-ти балльной шкале.

Задачи, выдаваемые на дом для самостоятельного решения, должны решаться дома, после чего записанные решения обсуждаются устно с преподавателями во время семинаров. При выставлении итоговой отметки за задачи учитывается доля числа решённых задач от общего количества выданных задач.

7 Содержание дисциплины

7.1 Раздел 1. Логика высказываний и элементы теории множеств

Содержание темы	Лекции	Семинары	Самостоятельная работа		Литература	
			Подготовка к семинарам	Письменное домашнее задание	Базовая	Дополнительная
Алгебра высказываний	2	2	3	3	[1],[2],[3]	[4]-2
Булевы алгебры множеств	2	2	3	3	[1]	[4]-1
Отношения и функции	2	2	3	3	[1]	[4]-1
Исчисление высказываний	2	2	3	3	[1],[2],[3]	[4]-2, [6],[7]

7.2 Раздел 2. Логика предикатов

Теории первого порядка и их модели	2	4	7	3	[1],[2],[3]	[4]-2, [6],[7]
Исчисление предикатов	4	4	9	3	[1],[2],[3]	[4]-2, [6],[7]
Элементы теории моделей	2	2	3	3	[1],[2],[3]	[4]-2, [6],[7]
Введение в аксиоматическую теорию множеств	4	4	9	3	[1],[3]	[7]

7.3 Раздел 3. Теория алгоритмов

Вычислимость и машины Тьюринга	2	4	9	3	[1],[2],[3]	[4]-3, [5],[6],[7]
Разрешимые и перечислимые множества	4	4	9	3	[1],[2],[3]	[4]-3, [5],[6],[7]
Неразрешимые алгоритмические проблемы	4	4	7	3	[1],[2],[3]	[4]-3, [5],[6],[7]

8 Образовательные технологии

На лекции даются все необходимые определения, доказываются ключевые теоремы курса, обсуждаются логические и неформальные связи между ними, а также теоремами из других разделов математики. Кроме того, приводятся примеры использования этих результатов для решения конкретных задач.

После этого студентам выдаётся листок с задачами для самостоятельного решения, содержащий как рутинные упражнения для усвоения стандартных вычислительных приёмов, так и теоремы для самостоятельного доказательства (или прочтения в учебнике), которые будут существенно использоваться в дальнейшем. Задачи должны решаться дома, после чего *индивидуально* сдаваться (устно или письменно) преподавателям во время семинарских занятий.

Задачи вызывающие значительные затруднения, коллективно обсуждаются в классе. Студенты, испытывающие затруднения при решении некоторых задач иногда соединяются в группы для совместной работы над не получающейся задачей, возможно, под чьим-нибудь руководством (преподавателя или уже разобравшего задачу студента).Однако разобранные таким образом задачи всё равно должны сдаваться каждым студентом индивидуально.

9 Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

Образец листочка с задачами

28. В фирме каждый сотрудник знает английский, немецкий или французский язык. При этом 6 человек знают английский, 6 - немецкий, 7 - французский, 4 - английский и немецкий, 3- французский и немецкий, 2 - французский и английский, 1 - все три языка. Сколько всего сотрудников в фирме? Сколько из них знает только английский язык?

29. а) Сколько целых чисел от 0 до 999 не делятся ни на 2, ни на 3?

б) Сколько целых чисел от 0 до 999 не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?

30. Существуют ли такие множества A,B,C, что

$A \cap B \neq \varnothing$, $A \cap C = (A \cap B) \setminus C = \varnothing$?

31. Рассмотрим 3 отрезка на числовой прямой: A=[0,1], B=[1,4], C=[2,5]. Какие из следующих 7 множеств непусты:

$A \cap B \cap C$, $\overline{A} \cap B \cap C$, $\overline{B} \cap A \cap C$, $\overline{C} \cap A \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$, $\overline{B} \cap \overline{C} \cap A$, $\overline{C} \cap \overline{A} \cap B$?

(Черта здесь обозначает дополнение до прямой)

32. Существуют ли отрезки A, B, C на одной прямой, такие что все 7 множеств

$A \cap B \cap C$, $\overline{A} \cap B \cap C$, $\overline{B} \cap A \cap C$, $\overline{C} \cap A \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$, $\overline{B} \cap \overline{C} \cap A$, $\overline{C} \cap \overline{A} \cap B$

непусты?

33. Три подмножества A, B, C множества U назовем *независимыми*, если все множества

$A \cap B \cap C$, $\overline{A} \cap B \cap C$, $\overline{B} \cap A \cap C$, $\overline{C} \cap A \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$, $\overline{B} \cap \overline{C} \cap A$, $\overline{C} \cap \overline{A} \cap B$,

$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ непусты (черта обозначает дополнение до U).

а) Докажите, что если множества A, B, C независимы, то их объединение содержит по крайней мере 7 элементов.

б) Найдите 3 независимых подмножества в множестве {1,2,3,4,5,6,7,8}.

34. Рассматриваются множества на плоскости.

а) Постройте 3 независимых отрезка.

б) Существуют ли 3 независимых полуплоскости?

в) Существуют ли 3 независимых окружности?

35. а) Дайте определение независимости для системы подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ множества U.

б) Сколько независимых подмножеств может содержать множество из 100 элементов?

в) Постройте 4 независимых подмножества в множестве {1,2,3,…,20}.

36. Постройте 4 независимых круга на плоскости.

37. Пусть M - множество, элементами которого являются другие множества. M называется *транзитивным*, если любой элемент любого элемента M снова является элементом из M. Постройте транзитивное множество, состоящее из трех различных элементов.

38. Постройте множество M из 5 элементов со следующим свойством:

$$\forall x \in M \ \forall y \in M \ (x \in y \vee x \in y \vee x = y).$$

39. Даны множества A, B, E, причем $B \subseteq A \subseteq E$.

а) Найдите все $X \subseteq E$, такие что $A \cap X = B$.

б) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} A \cap X = B, \\ A \cup X = E. \end{cases}$$

40. Найдите пропозициональную формулу α, такую что $(\alpha \wedge p) \sim (p \wedge q)$ и $(\alpha \vee p)$ - тавтология (p, q - пропозициональные буквы).

Образец контрольной работы

1. Докажите, что теория графов в сигнатуре без равенства неполна.

2. Может ли полная теория в сигнатуре с равенством иметь нормальную конечную модель и нормальную бесконечную модель?

3. Пусть T – полная теория с равенством, имеющая конечную модель. Докажите, что T не имеет бесконечных моделей.

4. Докажите, что не существует теории первого порядка в сигнатуре $\{+,\cdot,=,0,1\}$, моделями которой являются в точности все конечные поля. Аналогично -- для полей ненулевой характеристики.

5. Переведите в логическую символику и проверьте общезначимость полученной формулы:

В пьесе у каждого участника есть брат и сестра, также участвующие в этой пьесе. Никто не является своим собственным братом или сестрой. Брат не может быть сестрой. Значит, либо в этой пьесе нет вовсе действующих лиц, либо же их не меньше четырех.

6. Постройте формулу 1-го порядка без равенства, имеющую 3-элементную модель, но не имеющую 2-элементных моделей.

Образец варианта экзамена (зачета)

1. Докажите общезначимость формулы $\exists x \forall u \forall y \exists z\ (P(x,y) \to P(u,z))$

2. Выполнима ли формула $\forall x \exists y\ (Q(x,y) \leftrightarrow (Q(x,x) \wedge \neg Q(y,x)))$?

3. Общезначима ли формула
$\forall x \neg \forall y (\neg Q(x,y) \vee Q(y,x) \vee (Q(y,y) \to Q(x,x)))$?

4. Докажите, что если подмножество $\mathbf{Z}$ выразимо в $(\mathbf{Z},<)$, то оно либо пусто, либо совпадает с $\mathbf{Z}$.

5. Докажите, что формула
$\forall x \exists y\ (P(x,y) \wedge P(y,x)) \wedge \forall x \neg P(x,x) \wedge \forall x \exists y\ (x \neq y \wedge \neg P(x,y))$
имеет бесконечно много попарно неизоморфных конечных моделей.

6. Постройте формулу в сигнатуре с одним трехместным предикатным символом R, которая не является общезначимой, но имеет модели любой конечной мощности.

7. Постройте машину Тьюринга, выполняющую сложение натуральных чисел в двоичной записи.

8. Постройте машину Тьюринга, разрешающую множество $\{(x,y) \in \mathbf{N}^2 \mid x > y\}$.

9. Пусть A – перечислимое множество натуральных чисел. Докажите, что множество $\{(x,y) \mid (x+y) \in A\}$ перечислимо.

10. Пусть $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ -- всюду определенная вычислимая функция, которая возрастает при $x > 10$. Докажите, что множество значений функции f разрешимо.

10 Порядок формирования оценок по дисциплине

Оценка за текущий, промежуточный и итоговый контроль выставляется по 10-балльной системе.

Результирующая оценка за текущий контроль учитывает результаты студента по текущему контролю следующим образом:

$O_{текущий} = n_{1*} O_{к/р} + n_{2*} O_{кол} + n_{3*} O_{сам.\ работа}$

Преподаватель оценивает самостоятельную работу студентов**:** правильность выполнения домашних работ, задания для которых выдаются на семинарских занятиях, правильность решения задач на семинаре. Оценки за самостоятельную работу студента преподаватель выставляет в рабочую ведомость. Накопленная оценка - $O_{сам.\ работа}$ определяется перед промежуточным (итоговым) контролем.

Оценка за домашнее письменное задание: студент решил менее четверти задач листка - оценка 0-3 балла в зависимости от качества его рассказа и трудности решенных задач;
студент решил от четверти до половины задач - оценка 4-5 балла (с теми же оговорками),
студент решил от половины до трех четвертей предложенных задач - оценка 6-8 баллов;
студент решил больше трех четвертей предложенных задач - оценка 9-10 баллов

Сумма удельных весов должна быть равна единице: $\sum n_i = 1$ Способ округления накопленной оценки текущего контроля в пользу студента.

Результирующая оценка за промежуточный (итоговый) контроль складывается из результатов накопленной результирующей оценки за текущий контроль, удельный вес которой составляет $k_1 = 0{,}5$ и оценки за экзамен/зачет, удельный вес $k_2 = 0{,}5$.

$O_{промежуточный/итоговый} = 0{,}5 * O_{текущий} + 0{,}5 * O_{зачет/экзамен}$

Способ округления накопленной оценки промежуточного (итогового) контроля в форме зачета/экзамена в пользу студента.

Студент может получить возможность пересдать низкие результаты за текущий контроль.

11 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Базовые учебники

1. Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Математическая логика. М.: КомКнига, 2006.
2. Клини С.К. Математическая логика. М.: Мир, 1973.
3. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1971.

Дополнительная литература

4. Верещагин Н. К., Шень А. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1. Начала теории множеств. Часть 2. Языки и исчисления. Часть 3. Вычислимые функции. М: МЦНМО, 2002. http://www.mccme.ru/free-books/
5. Крупский В.Н., Плиско В.Е. Теория алгоритмов. М.: Academia, 2009.
6. Булос Дж., Джеффри Р. Вычислимость и логика. М.: Мир,1994.
7. Шенфилд Дж. Математическая логика. М.: Наука, 1975.
8. Корте Б., Фиген Й. Комбинаторная оптимизация. Теория и алгоритмы. – М.: МЦНМО, 2015.