



**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
"Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"**

Факультет компьютерных наук
Департамент больших данных и информационного поиска

**Программа дисциплины
Дискретная математика-2**

для направления 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
подготовки бакалавра

Авторы программы:

Верещагин Н.К., доктор физ.-мат. наук, профессор (nikolay.vereshchagin@gmail.com)

Вялый М.Н., кандидат физ.-мат. наук, доцент (vyalyi@gmail.com)

Одобрена на заседании департамента больших данных и информационного поиска

«__»_____ 2017 г.

Руководитель департамента

В.В.Подольский _____

Утверждена Академическим советом образовательной программы

«__»_____ 2017 г., № протокола _____

Академический руководитель образовательной программы

А.С. Конушин _____



Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
Программа дисциплины «Дискретная математика-2» для направления 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» подготовки бакалавра

Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения кафедры-разработчика программы.



1 Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов направления 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» подготовки бакалавра, изучающих дисциплину «Дискретная математика-2».

Программа разработана в соответствии с:

- Образовательным стандартом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»;
- Образовательной программой «Прикладная математика и информатика»;
- Рабочим учебным планом университета по направлению 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» подготовки бакалавра, утвержденным в 2016г.

2 Цели освоения дисциплины

Основная цель освоения дисциплины «Дискретная математика-2» -- обучить студентов основным понятиям и методам линейного программирования и логики, необходимым как в дальнейшем обучении, так и в работе по специальности.

3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен:

- Знать основные понятия и методы линейного программирования и логики, необходимые для дальнейшего изучения последующих дисциплин, предусмотренных базовым и рабочим учебными планами, а также для применения в профессиональной деятельности;
- Уметь пользоваться основными методами линейного программирования и логики для решения задач;
- Иметь навыки формализации и решения практических задач математическими методами.

В результате освоения дисциплины студент осваивает следующие компетенции:

Компетенция	Код по ФГОС / НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
Способен учиться, приобретать новые знания, умения, в том числе в области, отличной от профессиональной	УК-1	Умение учиться и приобретать новые знания и умения в области дискретной математики	Лекции, практические занятия, домашние задания
Способен провести теоретическую и экспериментальную оценку математического метода, алгоритма, модели данных	ПК-3	Умение проводить анализ и оценку методов и подходов дискретной математики	Лекции, практические занятия, домашние задания



Компетенция	Код по ФГОС / НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
Способен анализировать тексты и документы по математике и компьютерным наукам на русском(государственном) и английском языках	ПК-11	Умение анализировать условия задач и тексты конспектов лекций по дискретной математике	Практические занятия, домашние задания
Способен описывать проблемы и ситуации профессиональной деятельности, используя язык и аппарат математических и компьютерных наук	ПК-15	Умение излагать формулировки и доказательства теорем, решения задач по дискретной математике.	Практические занятия, домашние задания

4 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина относится к циклу математических и естественнонаучных дисциплин, является базовой для подготовки бакалавра по направлению 01.03.02 «Прикладная математика и информатика».

Для освоения учебной дисциплины, студенты должны владеть знаниями и навыками в объеме первого года обучения по программе бакалавриата по направлению 01.03.02 «Прикладная математика и информатика».

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

- Машинное обучение;
- Вычислительные методы;
- Алгоритмы для больших данных;
- Теория вычислений;
- Математическая логика и её приложения;
- Алгоритмы и сложность;
- Логические методы в информатике;
- Исследование операций;
- Теория игр;
- Теоретическая информатика;
- Комбинаторная оптимизация.



5 Тематический план учебной дисциплины

№	Название раздела	Всего часов	Аудиторные часы			Самостоятельная работа
			Лекции	Семинары	Практические занятия	
1	Задачи линейного программирования и системы линейных неравенств		4	4		16
2	Двойственность в линейном программировании и ее приложения		4	6		22
3	Полиэдры и политопы. Введение в симплекс-метод		4	4		16
4	Формулы логики первого порядка и задачи выразимости предикатов		6	8		26
5	Системы доказательств. Метод резолюций		6	6		20

6 Формы контроля знаний студентов

Тип контроля	Форма контроля	2 год				Параметры **
		1	2	3	4	
Текущий (неделя)	Коллоквиум		1			Устная беседа по пройденному материалу, проводится в конце 2-го модуля. Оценка - $O_{кол}$
	Домашнее задание	1	1			Разбиты на порции задач для письменной сдачи раз в 2 недели. Оценка за каждую из порций ставится по результатам устной «защиты» домашнего задания. Оценка за домашнее задание – среднее арифметическое оценок порций, выданных в текущем модуле (Соответственно $O_{дз1}$, $O_{дз2}$).
Итоговый	Экзамен		1			Письменный экзамен на зачетной неделе второго модуля, 2 часа 40 минут, Оценка - $O_{экз}$



6.1 Критерии оценки знаний, навыков

Для прохождения контроля студент должен продемонстрировать понимание основных определений, знание теорем и методов, умение применять изученные методы для решения задач. Оценки по всем формам текущего контроля выставляются по 10-ти балльной шкале.

6.2 Порядок формирования оценок по дисциплине

$$O_{итог} = 0,6 \cdot O_{накопленная} + 0,4 \cdot O_{экз},$$

Где $O_{накопленная} = (2/3)O_{колл} + (1/6)(O_{дз1} + O_{дз2})$

Или, более просто, вес коллоквиума в итоговой оценке – 40%, экзамена – 40%, всех домашних заданий – 20%.

Допускается оценка 0 в тех случаях, когда студент не сдавал домашних заданий (или не решил ни одной задачи на экзамене). Оценка 0 также ставится в случаях доказанного списывания на экзамене.

В вычислениях текущие оценки и промежуточные величины не округляются. Результат вычисляется точно и округляется только в момент выставления накопленной и итоговой оценок. Округление при выставлении итоговой оценки арифметическое, а при выставлении накопленной оценки используется следующее правило округления: между 1 и 5 округление вниз, между 5 и 6 округление арифметическое, а в остальных случаях округление вверх. Т.е. 3,92 округляется до 3, 5,48 – до 5, 5,54 – до 6, 7,12 – до 8.

Перевод в 5-балльную шкалу осуществляется по правилу:

Оценка по 10-балльной шкале	Оценка по 5-балльной шкале
0,1, 2, 3	неудовлетворительно
4, 5	удовлетворительно
6, 7	Хорошо
8, 9, 10	Отлично

7 Содержание дисциплины

Примеры задач линейного программирования.

Задача о максимальном потоке, транспортная задача. Виды задач линейного программирования. Задачи, сводящиеся к линейному программированию.

Системы линейных неравенств.

Синтаксические и семантические следствия систем линейных уравнений и линейных неравенств. Метод исключения переменных. Равносильность для однородных систем. Критерий несовместности для неоднородных систем. Лемма Фаркаша.

Двойственность в линейном программировании.

Формулировка прямой и двойственной задач для различных видов задач линейного программирования. Теорема двойственности. Приложения: теорема Форда-Фалкерсона.

Матричные игры.



Определение матричной игры с нулевой суммой. Стратегии: чистые и смешанные. Равновесные стратегии. Теорема о существовании равновесия в матричной игре с нулевой суммой.

Полиэдры и политопы.

Двойственность между конечно порожденными и полиэральными конусами. Всякий политоп является полиэдром. Всякий ограниченный полиэдр является политопом. Грани полиэдров. Вершины и ребра.

Введение в симплекс-метод.

Основная геометрическая идея симплекс-метода. Симплекс-метод для невырожденных полиэдров. Сходимость симплекс-метода с правилом Бленда в общем случае.

Формулы логики первого порядка.

Функции, предикаты. Определение формул первого порядка, истинности формулы. Параметры формулы и предикаты, выражаемые формулами.

Выразимость.

Примеры выразимости в разных сигнатурах. Арифметические формулы. Сигнатура для формул теории множеств.

Доказательства невыразимости.

Автоморфизмы. Элиминация кванторов.

Элементарная эквивалентность.

Игры Эренфойхта.

Общезначимые формулы.

Предваренная нормальная форма. Проверка общезначимости: идея системы доказательств.

Выполнимость булевых формул и формул первого порядка.

Общий случай и КНФ. Исчисление резолюций. Проверка выполнимости КНФ с помощью исчисления резолюций и направленным перебором по дереву. Исчисление резолюций для формул первого порядка.

8 Образовательные технологии

Чтение лекций и проведение семинаров. На семинаре разбираются прошлые домашние задачи, решаются задачи, выдается новое домашнее задание.

9 Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

9.1 Тематика заданий текущего контроля

Примерные вопросы/ задания для домашнего задания:

1. Напишите линейную программу для такой задачи: задано некоторое количество точек (x_i, y_i) , нужно найти линейную функцию $y = kx + b$, которая минимизирует максимальное абсолютное отклонение $\max |y_i - kx_i - b|$.
2. Приведите пример линейной программы с двумя переменными, у которой область допустимых значений бесконечна, но имеется оптимальное решение (с конечным значением целевой функции).



- Докажите, что в любой матрице есть или нетривиальная (не все коэффициенты нулевые) неотрицательная линейная комбинация строк, в которой все координаты неотрицательные, или нетривиальная неотрицательная комбинация столбцов, в которой все координаты неположительные.
- Напишите задачу, двойственную к задаче линейного программирования

$$\begin{aligned}x+y &\rightarrow \max \\ 2x+y &\leq 3 \\ x+3y &\leq 5 \\ x, y &\geq 0\end{aligned}$$

- В игре в орлянку один из игроков зажимает в кулак рублевую монету орлом или решкой вверх, а второй пытается отгадать, орел сверху или решка. Если отгадал, забирает монету, иначе платит рубль штрафа. Какова цена этой игры и каковы оптимальные стратегии для каждого из игроков?
- Найдите цену игры, заданной матрицей платежей

$$\begin{matrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{matrix}$$

- Постройте пример 4-мерного политопа с 12 вершинами, у которого каждая пара вершин связана ребром.
- Найдите размерности минимальных граней для полиэдров транспортной задачи и двойственной к ней.
- Запишите в сигнатуре теории упорядоченных множеств формулу, выражающую свойство линейного порядка.
- Запишите аксиомы группы в сигнатуре $(G, =, \times)$ (то есть двуместный предикат равенства и двуместный функциональный символ умножения).
- Рассмотрим естественную интерпретацию сигнатуры $(=, <)$ на множестве целых чисел. Выразите предикат $y = x+1$.
- Рассмотрим плоскость как интерпретацию сигнатуры, содержащей предикат равенства (совпадение точек), и двуместный предикат «находиться на расстоянии 1». Выразите двуместные предикаты «находиться на расстоянии 2» и «находиться на расстоянии не более 2».
- Докажите, что двуместный предикат « x есть n -е по порядку простое число» арифметичен.
- Докажите, что предикат $y = x+1$ не выразим в интерпретации $(\mathbb{Z}, =, f)$, где f – одностная функция, которая x отображает в $x+2$.
- Опишите выразимые предикаты, проведя элиминацию кванторов для сигнатуры $(\mathbb{N}, =, S, P)$ или ее подходящего расширения. Здесь \mathbb{N} множество натуральных чисел, S – операция прибавления 1, P – предикат «быть степенью двойки».
- Докажите выполнимость КНФ, которая состоит из 200 дизъюнктов, каждый из которых содержит 8 различных литералов.

9.2 Вопросы для оценки качества освоения дисциплины

Примерный перечень вопросов к экзамену по всему курсу.



1. Формулировка задачи линейного программирования. Основные виды задач линейного программирования, их эквивалентность.
2. Решение систем линейных неравенств методом исключения переменных.
3. Критерий совместности системы линейных неравенств. Лемма Фаркаша.

5. Теорема двойственности в линейном программировании.
6. Сводимость решения задачи линейного программирования к проверке совместности системы линейных неравенств.
7. Соотношения дополняющей нежесткости.
8. Существование равновесных смешанных стратегий для матричных игр с нулевой суммой.
9. Совпадение классов конечно порожденных конусов и полиэдральных конусов.
10. Всякий политоп является полиэдром. Всякий ограниченный полиэдр является политопом.
11. Теорема о разложении полиэдра.
12. Вершины политопа.
13. Описание вершин многогранника бистохастических матриц.
14. Симплекс-метод для невырожденных полиэдров.
15. Симплекс-метод в общем случае, сходимость.
16. Определение формул логики первого порядка.
17. Интерпретации формул первого порядка. Определение истинности.
18. Выразимость предикатов арифметическими формулами.
19. Невыразимость предикатов: автоморфизмы.
20. Элиминация кванторов, применение для доказательства невыразимости.
21. Элементарная эквивалентность. Игры Эренфойхта.
22. Общезначимые формулы. Предваренная нормальная форма.
23. Сводимость проверки выполнимости булевой формулы к выполнимости КНФ.
24. Метод резолюций. Корректность и полнота метода резолюций.

10 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

10.1 Базовый учебник

Н. К. Верещагин, А. Шень. Языки и исчисления. 4-е изд., испр., М.: МЦНМО, 2012, 240 с.
<http://www.mccme.ru/free-books/shen/shen-logic-part2-2.pdf>

10.2 Основная литература

С. Дасгупта, Х. Пападимитриу, У. Вазирани. Алгоритмы. М.: МЦНМО, 2014, 320 с. Глава 7.
А. Схрейвер. Теория линейного и целочисленного программирования. Т.1. М.: Мир, 1991, 360 с.
Ч.Чень, Р.Ли. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. М.: Наука, 1983. 360 с. Глава 5.

10.3 Дополнительная литература

Б. Корте, Й. Фиген. Комбинаторная оптимизация. Теория и алгоритмы. М.: МЦНМО, 2015, 720 с.