

**Правительство Российской Федерации**

**Государственное образовательное бюджетное учреждение  
высшего образования**

**«Национальный исследовательский университет  
Высшая школа экономики»**

Факультет компьютерных наук  
Кафедра анализа данных в биологии и медицине

**Программа дисциплины**

**«Комбинаторика и теория вероятностей»**

для направления 01.04.02 – **Прикладная математика и информатика**  
подготовки магистра

Авторы программы:

Шуплецов М.С., кандидат физ.-мат. наук, доцент

Одобрена на заседании кафедры  
технологий моделирования сложных систем

Руководитель кафедры

\_\_\_\_\_ А..Соболевский

Москва, 2016

## 1. Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа «Комбинаторика и теория вероятностей» устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов первого года обучения по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика», обучающихся по магистерской программе «Математические методы оптимизации и стохастики» и изучающих дисциплину «Современные эффективные методы нелинейной оптимизации».

Программа разработана в соответствии с:

- Образовательным стандартом ВПО ГОБУ НИУ ВШЭ;
- Образовательной программой «Математические методы оптимизации и стохастики» подготовки магистра направления 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»;
- Рабочим учебным планом университета подготовки магистра по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика», утвержденным в 2014 г.

## 2 Цели освоения дисциплины

В курсе даются основы комбинаторики и теории графов, а также начальные сведения по теории вероятностей.

Целями курса является формирование у студентов знаний и навыков работы с дискретными объектами, умения формулировать перечислительные задачи на математическом языке и решать их, оценивать порядок роста возникающих величин, ставить и решать задачи, связанные с понятием дискретной вероятности.

## 3. Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате изучения адаптационного курса студенты должны:

- Знать
  - фундаментальные понятия комбинаторики и теории вероятностей;
  - практические приёмы решения комбинаторных задач;
  - понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в элементарной комбинаторике, теории графов и теории вероятностей;
  - основные свойства соответствующих математических объектов;
- Уметь
  - понять поставленную задачу;
  - использовать свои знания для решения задач комбинаторики, теории вероятностей;
  - оценивать корректность постановок задач; строго доказывать или опровергать утверждение;
  - самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
  - самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
  - точно представить математические знания в области комбинаторики и теории вероятностей в устной и письменной форме
    - Иметь навыки
      - доказательства утверждений методом математической индукции;

- освоения большого объема информации и решения комбинаторных задач;
- самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования комбинаторных и вероятностных методов;

В результате прохождения курса студент осваивает и развивает следующие компетенции:

Компетенция	Код по ФГОС/НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
Способен рефлексировать (оценивать и перерабатывать) освоенные научные методы и способы деятельности		Знание основных понятий комбинаторики и теории вероятностей, основных наиболее используемых способов формализации различных задач на комбинаторном языке, способность строить вероятностные модели для решения практических задач	Практические занятия, домашние задания
Способен анализировать и воспроизводить смысл междисциплинарных текстов с использованием языка и аппарата прикладной математики		Знание основных понятий комбинаторики и теории вероятностей, основных наиболее используемых способов формализации различных задач на комбинаторном языке, способность строить вероятностные модели для решения практических задач	Лекции, практические занятия, домашние задания
Способен создавать междисциплинарные тексты с использованием языка и аппарата прикладной математики		Способность описывать решение практических задач в рамках комбинаторных и вероятностных моделей и формулировать результаты	Практические занятия, домашние задания
Способен публично представлять результаты профессиональной деятельности (в том числе с использованием информационных технологий)		Способность описывать решение практических задач в рамках комбинаторных и вероятностных моделей и формулировать результаты	Практические занятия, домашние задания
Способен использовать в профессиональной деятельности знания в области естественных наук, математики и информатики, понимание основных фактов, концепций,		Знание основных понятий комбинаторики и теории вероятностей, основных наиболее используемых способов формализации	Лекции, практические занятия, домашние задания

Компетенция	Код по ФГОС/ НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
принципов теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой		различных задач на комбинаторном языке, способность строить вероятностные модели для решения практических задач	
Способен понимать и применять в исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат		Знание основных понятий комбинаторики и теории вероятностей, основных наиболее используемых способов формализации различных задач на комбинаторном языке, способность строить вероятностные модели для решения практических задач	Лекции, практические занятия, домашние задания

#### 4. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина является базовой по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика», обучающихся по магистерской программе «Математические методы оптимизации и стохастики» на 2015-2016 учебный год (1 семестр).

Изучение дисциплины базируется на знаниях по математическому анализу и общей алгебре, частично полученных студентами на младших курсах университетов. Специфические требования отсутствуют. Студенты должны быть готовы к восприятию сжатого систематизирующего блока, охватывающего основные темы комбинаторики и теории вероятностей.

Основные положения дисциплины будут использованы в дальнейшем при изучении ряда дисциплин магистерской программы, в частности, дисциплины:

- Выполнение курсовых работ, предусмотренных РУП по направлению 01.04.02.

#### 5. Тематический план учебной дисциплины

№	Название темы	Всего часов	Аудиторные часы		Самостоятельная работа
			Лекции	Семинары	
1.	Основные объекты комбинаторики и комбинаторные числа	28	4	4	20
2.	Основы комбинаторики разбиений	14	2	2	10
3.	Общая теория рекуррентных	14	2	2	10
4.	Асимптотические оценки в комбинаторике	14	2	2	10
5.	Элементы теории вероятностей	44	6	6	32

Итого	114	16	16	82
-------	-----	----	----	----

## 6. Формы контроля знаний студентов

Курс читается в первом модуле.

Тип контроля	Форма контроля	Параметры
Текущий	Домашнее задание	Письменная работа 240 минут
Текущий	Самостоятельная работа	Письменная работа 45 минут
Итоговый	Экзамен	Устный экзамен

### Критерии оценки знаний

В рамках курса студенты должны выполнить ряд домашних заданий, написать три самостоятельные работы и сдать экзамен. Каждое домашнее задание дает равный вклад в суммарную оценку за домашние задания, которая нормируется на 10-балльную шкалу. Аналогичным образом формируется оценка за самостоятельные работы. Экзамен оценивается по 10-балльной шкале и содержит набор теоретических вопросов и задач по различным темам курса.

### Порядок формирования оценки по дисциплине

**Накопленная оценка** за текущий контроль формируется из оценок за самостоятельные работы и домашние задания следующим образом:

$$0,5 * C_{CP} + 0,5 * C_{ДЗ},$$

где  $C_{CP}$  — оценка за контрольные работы,  $C_{ДЗ}$  — оценка за домашние задания, и округляется до целого числа арифметическим способом.

**Итоговая оценка по дисциплине** выставляется по десятибалльной шкале, согласно формуле:

$$0,5 * C_{НАКОП} + 0,5 * C_{ЭКЗ},$$

где  $C_{накоп}$  — накопленная оценка,  $C_{экз}$  — оценка за экзамен, и округляется до целого числа арифметическим способом.

**Таблица соответствия оценок по десятибалльной и пятибалльной системе**

По десятибалльной шкале	По пятибалльной системе
1 – неудовлетворительно 2 – очень плохо 3 – плохо	неудовлетворительно – 2
4 – удовлетворительно 5 – весьма удовлетворительно	удовлетворительно – 3
6 – хорошо 7 – очень хорошо	хорошо – 4
8 – почти отлично 9 – отлично 10 – блестяще	отлично – 5

## **7. Содержание программы по темам**

### **Основные объекты комбинаторики и комбинаторные числа**

Основные правила комбинаторики как следствие подсчёта мощностей композитных множеств. Сочетания и размещения с повторениями и без повторений. Формулы для их количеств. Формула бинома Ньютона: «комбинаторная» и «общая». Основные свойства чисел сочетаний (биномиальных коэффициентов): симметричность, унимодальность, основное рекуррентное соотношение.

Подсчёт классов эквивалентности. Сочетания с повторениями как классы эквивалентности размещений с повторениями. Подсчёт количества «циклических» слов: обращение Мёбиуса на множестве натуральных чисел.

### **Основы комбинаторики разбиений**

Разбиения чисел на слагаемые: постановки задач, рекуррентные соотношения, диаграммы и их применение для доказательства равенства количеств разбиений с различными ограничениями.

### **Общая теория рекуррентных соотношений**

Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами. Характеристический многочлен рекуррентного соотношения, свойство его корней. Общие и частные решения рекуррентных соотношений.

### **Асимптотические оценки в комбинаторике**

Основные обозначения и определения  $O$ -символики в асимптотическом анализе. Формула Стирлинга, её применение для получения асимптотических оценок комбинаторных чисел. Асимптотика решений линейных рекуррентных соотношений.

### **Элементы теории вероятностей**

Аксиоматическая основа теории вероятностей: колмогоровская тройка. Примеры в случае конечного и «геометрического» пространства элементарных событий.

Условная вероятность. Формулы Байеса, полной вероятности.

Случайные величины. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, общее определение момента и центрального момента. Распределение случайной величины. Основные дискретные и непрерывные распределения.

Предельные теоремы теории вероятностей для биномиальных распределений и независимых одинаково распределённых случайных величин.

## **8. Оценочные средства для текущего и итогового контроля**

### **Вопросы для оценки качества освоения дисциплины**

1. Основные правила комбинаторики: правило сложения, правило умножения. Принцип Дирихле. Примеры.
2. Формула включений и исключений. Примеры.
3. Факториал. Размещения, перестановки и сочетания. Бином Ньютона.
4. Сочетания с повторениями. Полиномиальная формула.
5. Свойства чисел сочетания: доказательство знакопостоянных тождеств. Треугольник Паскаля.

6. Частный случай формулы включений и исключений. Доказательство знакопеременных тождеств.
7. Оценки для факториалов и биномиальных коэффициентов. Формула Стирлинга (б/д).
8. Функция Мёбиуса. Формула обращения Мёбиуса.
9. Применение формулы Мёбиуса для подсчета числа циклических последовательностей.
10. Основы комбинаторики разбиений: примеры задач.
11. Разбиение чисел на слагаемые. Доказательство рекуррентных соотношений.
12. Разбиение чисел на слагаемые. Диаграммная техника.
13. Разбиение чисел на слагаемые. Формула Эйлера. Формула Харди-Рамануджана (б/д).
14. Общая теория рекуррентных соотношений. Простейшие примеры.
15. Вероятностная модель эксперимента с конечным числом исходов. Условная вероятность. Формула Байеса. Формула полной вероятности.
16. Случайные величины, заданные на дискретном вероятностном пространстве. Непрерывные случайные величины. Нормальное распределение, распределение хи-квадрат и распределение Стьюдента.
17. Математическое ожидание и дисперсия. Предельные законы теории вероятностей. Центральная предельная теорема. Совместное распределение случайных величин. Ковариация и корреляция. Геометрический смысл.

**Примеры экзаменационных билетов (заданий, тестов и др. материалов, используемых для проведения зачета, экзамена), примеры заданий по итоговому контролю (экзамену)**

**Пример билета №1.**

Дайте неформальное описание «метода выделенного элемента». Какие примеры применения этого метода по ходу курса Вы помните? Докажите с помощью метода выделенного элемента соотношение для чисел Стирлинга  $\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} + k \cdot \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ .

Дайте определение функции Мёбиуса. Сформулируйте утверждение о формуле обращения Мёбиуса. Какие комбинаторные задачи позволяет решить формула обращения Мёбиуса? Приведите пример.

**Пример билета №2.**

Что такое рекуррентное соотношение с постоянными коэффициентами? Как определяется его характеристический многочлен? Что значит «найти общее решение рекуррентного соотношения»? Найдите частное решение рекуррентного соотношения  $a_n = a_{n-1} - 2a_{n-2}$  с начальными условиями  $a_1 = a_2 = 1$ .

Сформулируйте центральную предельную теорему для сумм независимых одинаково распределённых случайных величин. Объясните, что такое центрирование и нормирование в формуле из этой теоремы. Сформулируйте предельную теорему Муавра—Лапласа.

## **9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

### **Основная литература.**

1. А.М. Райгородский. Комбинаторика и теория вероятностей. - Интеллект, 2013.
2. Н.Я. Виленкин, А.Н. Виленкин, П.А. Виленкин. Комбинаторика. — М.: ФИМА, МЦНМО, 2010.
3. Н.Б. Алфутова, А.В. Устинов. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. — М.: МЦНМО, 2009.
4. Дж.А. Андерсон. Дискретная математика и комбинаторика. — М.: Вильямс, 2004.

### **Дополнительная литература.**

1. R.L. Graham, M. Grottschel, L. Lovasz. Handbook of combinatorics. Vol 1. 1995. North Holland; 1 edition. 1250 p.
2. Р.Л. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. Конкретная математика. Основание информатики. — М. Мир, 2006.
3. Н. Алон, Дж. Спенсер. Вероятностный метод. — М.: Бином, 2007.

Автор программы: \_\_\_\_\_ / Шуплецов М.С. /