



Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
Программа дисциплины НИС «Дифференциальная геометрия, гладкие структуры и калибровочная теория» для направления 01.03.01 «Математика» подготовки бакалавра 01.04.01 «Математика»  
подготовки магистра

**Правительство Российской Федерации**

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования**

**"Национальный исследовательский университет  
"Высшая школа экономики"**

**Факультет Математики**

**Программа дисциплины НИС**

**«Дифференциальная геометрия, гладкие структуры и калибровочная теория»**

для направления 01.03.01 «Математика» подготовки бакалавра  
для направления 01.04.01 «Математика» подготовки магистра

Автор программы: Тихомиров А.С., д.ф.-м.н., проф. astikhomirov@mail.ru

Рекомендована секцией УМС по математике «\_\_» \_\_\_\_\_ 2017 г.

Председатель С.М. Хорошкин \_\_\_\_\_

Утверждена УС факультета математики «\_\_» \_\_\_\_\_ 2017 г.

Ученый секретарь Ю.М. Бурман \_\_\_\_\_

Москва, 2017

*Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения кафедры-разработчика программы.*



## 1 Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов направления 01.03.01 «Математика» подготовки бакалавра, направления 01.04.01 «Математика» подготовки магистра

Программа разработана в соответствии с:

- ОС НИУ ВШЭ;
- Рабочим учебным планом университета по направлению 01.03.01 «Математика» подготовки бакалавра 01.04.01 «Математика» подготовки магистра, специализации Математика, утвержденным в 2017 г

## 2 Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Дифференциальная геометрия, гладкие структуры и калибровочная теория» являются:

- Формирование у слушателей представления о базисных понятиях, основных методах и применениях дифференциальной геометрии в теории гладких многообразий;
- Знакомство с калибровочной теорией как аппаратом дифференциальной геометрии при изучении гладких структур на топологических многообразиях;
- Углублённое изучение и владение методами калибровочной теории, в частности, вычисление кривизны связностей на главных и векторных расслоениях;
- Рассмотрение конкретных примеров пространств модулей автодуальных связностей — инстантонов - на четырехмерных многообразиях, знакомство с современными результатами Дональдсона, Уленбек, Таубса по приложению инстантонов к описанию гладких структур на многообразиях.

## 3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен:

- Получить общее представление об активно развивающемся разделе современной математики «дифференциальная геометрия и калибровочная теория», изучить базисные понятия и основные методы;
- Изучить основные методы, принципы и математические структуры, используемые в дифференциальной геометрии и калибровочной теории, в частности, со связностями на



главных и векторных расслоениях, ковариантным дифференцированием и кривизной связности;

- Ознакомиться с применениями дифференциальной геометрии и калибровочной теории в других разделах математики, в частности, в дифференциальной топологии четырехмерных многообразий;
- Быть готовым использовать основные принципы и методы дифференциальной геометрии и калибровочной теории в последующей профессиональной деятельности в качестве научных сотрудников, преподавателей вузов.

В результате освоения дисциплины студент осваивает следующие компетенции:

Компетенция	Код по ФГОС/ НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
умение формулировать результат	ПК-3	Правильно воспроизводит чужие результаты  Правильно формулирует собственные результаты	Компетенция формируется в любом сегменте учебного процесса Формируется в процессе активных занятий (участие в семинарах, выполнение курсовых и дипломных работ).
умение строго доказать утверждение	ПК-4	Воспроизводит доказательства стандартных результатов, услышанных на лекциях  Оценивает строгость и корректность научных текстов по геометрии	Изучение базового курса  За счет повышения общефизической и математической культуры в процессе обучения
умение грамотно пользоваться языком предметной области	ПК-7	Владеет минимально необходимой профессиональной лексикой в области геометрии  Распознает и воспроизводит названия основных математических структур, возникающих при изучении данной дисциплины, умеет корректно формулировать утверждения и их доказательства	Продумывание и повторение услышанного на семинарах и лекциях. Беседы с преподавателями во время консультаций.  Компетенция достигается в процессе накопления опыта работы по данной теме и общения с преподавателями.
понимание корректности постановок задач	ПК-10	Понимает постановки проблем  Адекватно оценивает корректность использования тех или иных математических методов, применяемых при формулировке и решении задач	Продумывание базовых понятий курса  Вырабатывается в процессе решения задач, самостоятельного чтения, работы над курсовыми заданиями



Компетенция	Код по ФГОС/НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
выделение главных смысловых аспектов в доказательствах	ПК-16	Понимает и воспроизводит ключевые идеи, методы и конструкции геометрии и ее элементарных приложений  Обосновывает и оценивает мотивировки и логические ходы доказательств основных результатов проективной и неевклидовой геометрии	Продумывание ключевых моментов лекций  Вырабатывается путем активного решения задач, самообразования, общения с преподавателем

#### 4 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина относится к циклу математических и естественно научных дисциплин и блоку дисциплин, обеспечивающих подготовку бакалавра и магистра направления подготовки «Математика»

Изучение данной дисциплины базируется на следующих дисциплинах: базовые курсы геометрии и алгебры (1 год бакалавриата);

Желательно, но не необходимо также знакомство с некоторыми основными понятиями и результатами из курсов: введение в дифференциальную топологию;

Для освоения учебной дисциплины, студенты должны владеть следующими знаниями:

- гладкое многообразие, касательное пространство, метрика на многообразии

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

Дифференциальная геометрия;

Алгебраическая геометрия;

Дополнительные главы математической физики.

#### 5 Тематический план учебной дисциплины

№	Название раздела	Всего часов	Аудиторные часы			Самостоятельная работа
			Лекции	Семинары	Практические занятия	
1	<b>Гладкие структуры на многообразиях</b> Гладкие структуры на топологических многообразиях. Топологические четырехмерные многообразия. Гладкие четырехмерные многообразия. Экзотические гладкие структуры на пространстве $\mathbf{R}^4$ .			6		



2	<b>Связности на расслоениях</b> Главные и векторные расслоения на многообразиях. Касательное расслоение. Тензоры. Связности на расслоениях. Ковариантное дифференцирование.			6		
3	<b>Кривизна и характеристические классы</b> Тензор кривизны связности на расслоении. Связь между кривизной и ковариантным дифференцированием. Характеристические классы расслоений со связностями, их вычисление через кривизну по формулам Черна-Вейля.			6		
4	<b>Многообразия связностей</b> Многообразия связностей. Пространства Соболева. Приводимые связности. Калибровочная группа. Теорема о срезе. Пространство модулей связностей.			6		
5	<b>Автодуальность. Инстантоны</b> Функционал Янга-Миллса. Уравнения автодуальности. Инстантоны. Пространства модулей инстантонов. Формулировка теоремы Дональдсона о гладких односвязных четырехмерных многообразиях с положительно определенной формой пересечения в двумерных гомологиях.			6		
6	<b>Пространство модулей инстантонов</b> Гладкость пространства модулей инстантонов в точках, отвечающих неприводимым связностям. Комплекс Атьи-Хитчина-Зингера. Ориентируемость пространства модулей в гладких точках. Особые точки пространства модулей			8		
7	<b>Компактность пространства модулей</b> Результаты Уленбек об автодуальных связностях. Теорема Уленбек о компактности пространства модулей инстантонов.			10		
8	<b>Инстантоны на сфере <math>S^4</math>. Теорема Таубса</b> Истантоны с зарядом 1 на сфере. Прививка Таубса. Теорема Таубса о прививке инстантонов.			12		
9	<b>Теорема Дональдсона о многообразиях с положительной формой пересечения</b> Теорема Таубса о воротнике пространства модулей инстантонов с зарядом 1 на			12		



многообразиях с положительной формой перечечения. Доказательство теоремы Дональдсона.					
Итого:			72		

## 6 Формы контроля знаний студентов

### 6.1. Критерии оценки знаний, навыков

Основная форма текущего контроля – решение задач из домашних заданий (7-10 задач по каждой теме). Задачи подбираются так, чтобы их решение потребовало от студента свободного владения основными понятиями и умения пользоваться техническими (вычислительными) приемами, которые изучаются в соответствующем разделе курса. Часть задач повышенной сложности отмечается звёздочками. Решение таких задач не является необходимым условием для получения отличной оценки, но существенно способствует получению таковой. Оценивается решение задач в процентной доле общего числа решённых в течение семестра задач (включая сюда и задачи со звёздочкой) от общего количества выданных в течение семестра задач без звёздочек. Таким образом, результат текущего контроля может быть выше 100%

Экзамен и зачёт представляют собою письменные работы продолжительностью 4 часа каждая. В каждой работе студентам предлагается 8 задач. Для получения 100% результата достаточно правильно решить 6 задач. При решении большего числа задач оценка увеличивается. За полное решение каждой задачи студент получает 10 баллов, окончательный результат экзамена оценивается в процентной доле набранного количества баллов по отношению к 60.

### 6.2. Порядок формирования оценок по дисциплине

Промежуточная оценка за первый модуль вычисляется по формуле

$$\text{Max}(150, E+N)/15$$

где E - общее количество набранных в зачётной работе баллов в процентах от 60, а N – общее количество решённых домашних задач (включая задачи со звёздочками) в процентах от общего количества выданных в первом модуле задач без звёздочек. Таким образом, для получения максимальной оценки 10 достаточно решить 75% домашних заданий и 5 задач из зачётной работы.

Итоговая оценка за второй модуль вычисляется по аналогичной формуле

$$\text{Max}(150, E+N)/15$$

где E - общее количество набранных в экзаменационной работе баллов в процентах от 60, а N – общее количество решённых домашних задач (включая задачи со звёздочками) в процентах от общего количества выданных в течение двух модулей задач без звёздочек. Таким образом, для получения максимальной оценки 10 достаточно решить 75% домашних заданий и 5 экзаменационных задач.

В диплом ставится результирующая итоговая оценка по учебной дисциплине.

## 7 Образовательные технологии

Студентам на дом даются задачи для самостоятельного решения, содержащие как рутинные упражнения для усвоения пройденного теоретического материала, так и исследовательские задачи, позволяющие проверить уровень понимания предмета в целом и требующие изучения



дополнительного материала, а также известной исследовательской самостоятельности. Решения записываются и потом индивидуально обсуждаются с преподавателем и его ассистентами. Допускается предварительная присылка решений по электронной почте. По наиболее трудным и глубоким сюжетам заранее назначаются докладчики.

## 8 Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

### 8.1 Тематика заданий текущего контроля

Пример домашнего задания:

1. Пусть  $q$  - унимодулярная положительно определенная целочисленная билинейная форма на решетке  $L = \mathbb{Z}^r$ . Покажите, что число векторов  $v$  в  $L$  с условием  $q(v, v) = 1$  не превосходит  $r$ . Покажите, что если число таких векторов равно  $2r$ , то форма  $q$  диагонализуема над  $\mathbb{Z}$ .
2. Докажите, что если  $P \times G \rightarrow P$  – гладкое свободное действие компактной группы Ли  $G$  на гладком многообразии  $P$ . Докажите, что это действие определяет гладкое главное расслоение  $P \rightarrow P/G$ .
3. Покажите, что естественное действие группы  $GL(n, \mathbb{R})$  на множестве реперов  $E$  касательного расслоения гладкого многообразия  $X$  задает на  $E$  структуру гладкого главного  $GL(n, \mathbb{R})$ -расслоения.
4. Пусть  $f: P \rightarrow B$  – главное  $G$ -расслоение. Докажите, что  $f^*P \rightarrow P$  есть тривиальное главное  $G$ -расслоение.
5. Пусть  $A$  — связность на векторном расслоении  $W \rightarrow X$ , рассматриваемая как ковариантное дифференцирование  $\square_A: \Omega^0(X, W) \rightarrow \Omega^1(X, W)$ . Это дифференцирование продолжается до линейного оператора  $\square_A \square_A: \Omega^1(X, W) \rightarrow \Omega^2(X, W)$ ,  $\square_A(\eta \square \lambda) = d\eta \square \lambda + (-1)^r \eta \square \square \lambda$ , для любых  $\eta \square \Omega^r(X, W)$ ,  $\lambda \square \Omega^{1-r}(X, W)$ . Покажите, что оператор  $\square_A \square_A: \Omega^1(X, W) \rightarrow \Omega^2(X, W)$  (называемый оператором кривизны связности  $A$ ) есть умножение на 2-форму со значениями в расслоении  $\text{End}W$ .

## 9 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### 9.1. Базовые учебники:

1. Д.Фрид, К.Уленбек. Инстантоны и четырехмерные многообразия. Москва, Мир, 1988.
2. С.Н.Taubes. Differential Geometry Bundles, Connections, Metrics and Curvature. Oxford Univ. Press, 2011.

### 9.2 Основная литература

3. S.K.Donaldson, P.B.Kronheimer. The Geometry of Four-Manifolds. Oxford, Clarendon Press, 1990.
4. R.Friedman, W.Morgan (eds). Gauge Theory and the Topology of Four-Manifolds. IAS/Park City Math. Series, Vol. 4, 1997.

### 9.3 Дополнительная литература

5. А.Бессе. Четырехмерная риманова геометрия. М., Мир, 1985.