Нижегородский филиал
Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования
"Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"

Факультет «Информатики, математики и компьютерных наук»
Кафедра прикладной математики и информатики

Программа дисциплины «Математический анализ»

для образовательной программы «Прикладная математика и информатика»
направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика
уровень бакалавр

Разработчик программы: Чистякова С. А., ст. преподаватель, schistyakova@hse.ru

Одобрена на заседании кафедры ПМИ «___»_____ 2015 г.
Зав. кафедрой В.А. Калягин _____

Рекомендована Академическим советом образовательной программы
«___»_____ 2015 г., № протокола_____

Утверждена «___»_____ 2015 г.
Академический руководитель образовательной программы
Н.В. Карпов _____

Нижний Новгород, 2015

Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов направления подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», изучающих дисциплину «Математический анализ».

Программа разработана в соответствии с:

- Образовательным стандартом НИУ ВШЭ по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» ;
- Образовательной программой «Прикладная математика и информатика»;
- Рабочим учебным планом университета по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», утвержденным в 2015г.

Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Математический анализ» являются углубленное изучение основных понятий математического анализа (предельный переход, непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость), овладение методами математического анализа функций одной и нескольких вещественных переменных (построение графиков, нахождение локальных и глобальных экстремумов функций), применение полученных знаний к анализу различных математических моделей экономических явлений и решению бизнес-задач.

Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен:

- Знать основные определения и точные формулировки теорем математического анализа.
- Уметь интерпретировать основные понятия на простых модельных примерах, решать типовые теоретические и вычислительные задачи.
- Иметь навыки (приобрести опыт) применения методов математического анализа в смежных теоретических и прикладных областях.

В результате освоения дисциплины студент осваивает следующие компетенции:

Компетенция	**Код по ОС НИУ**	**Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)**	**Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции**
Способен учиться, приобретать новые знания, умения, в том числе в области, отличной от профессиональной	УК-1	Студент демонстрирует способность ясно излагать содержание основных теоретических вопросов математики, логически верно строить рассуждение при решении задач и обосновывать полученные результаты	Систематическое выполнение домашних заданий, посещение лекционных и семинарских занятий, научных семинаров, чтение рекомендованной и дополнительной литературы.
Способен критически оценивать и переосмыслять накопленный опыт (собственный и чужой), рефлексировать профессиональную и социальную деятельность	УК-9	Студент владеет навыками самостоятельной работы с рекомендованными источниками информации, обладает способностью к анализу и обобщению получаемой информации	Систематическая подготовка студентов к устным ответам, выступления на семинарах и конференциях, выполнение публичных презентаций своих исследований

Компетенция	Код по ОС НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
Способен провести теоретическую и экспериментальную оценку математического метода, алгоритма, модели данных	ПК-3	Студент владеет навыками формализации конкретных прикладных задач в математические модели/задачи, умеет применять методы математического анализа для их решения с последующей трактовкой этих результатов в терминах исходной задачи	Систематическая самостоятельная работа студентов с рекомендованными и дополнительными материалами, поиск дополнительных источников информации в интернете, посещение научных семинаров
Способен анализировать тексты и документы по математике и компьютерным наукам на русском (государственном) и английском языках	ПК-11	Студент демонстрирует интерес к дополнительным источникам информации, способность самостоятельного поиска новых актуальных материалов, проявляет интерес к математическим конференциям и научным семинарам	Систематическая самостоятельная работа студентов с рекомендованными и дополнительными материалами, поиск дополнительных источников информации в интернете, посещение научных семинаров
Способен описывать проблемы и ситуации профессиональной деятельности, используя язык и аппарат математических и компьютерных наук	ПК-15	Студент владеет навыками формализации конкретных прикладных задач в математические модели/задачи, умеет применять методы математического анализа для их решения с последующей трактовкой этих результатов в терминах исходной задачи	Систематическая самостоятельная работа студентов с рекомендованными и дополнительными материалами, поиск дополнительных источников информации в интернете, посещение научных семинаров

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина относится к профессиональному циклу дисциплин, является базовой для студентов 1-го курса подготовки бакалавра по направлению 01.03.02 «Прикладная математика и информатика». Курс читается в 1-4 модулях первого учебного года.

Изучение данной дисциплины базируется на хорошем владении математическим аппаратом выпускника средней общеобразовательной школы.

Для освоения учебной дисциплины, студенты должны владеть следующими знаниями и компетенциями:

- знать основы математического анализа, алгебры и геометрии в рамках средней общеобразовательной школы,
- уметь решать типовые школьные задачи по математике,
- помнить основные математические теоремы школьного курса математики.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

- Дифференциальные и разностные уравнения,
- Теория вероятностей и математическая статистика,
- Методы оптимальных решений.
- Эконометрика,
- Экономика.

Тематический план учебной дисциплины

№	Название раздела	Всего часов	Аудиторные часы			Самостоятельная работа
			Лекции	Семинары	Практические занятия	
1	Введение в анализ	12	2	2		8
2	Предел последовательности	40	6	8		26
3	Предел функции	48	8	12		28
4	Непрерывные функции	30	4	6		20
5	Дифференциальное исчисление функций одной переменной	60	10	14		36
6	Интегральное исчисление функций одной переменной	60	8	12		40
7	Дифференциальное исчисление функций многих переменных	50	6	12		32
8	Интегральное исчисление функций многих переменных	42	4	12		26
9	Числовые и функциональные ряды.	38	8	10		20
	Всего Трудоемкость дисциплины	380 10 з.е.	56	88		236

Формы контроля знаний студентов

Тип контроля	Форма контроля	1-ый год				Параметры
		1	2	3	4	
Текущий (неделя в модуле)	Домашнее задание	7		5		Письменная работа
Промежуточный	Экзамен		*			Письменная работа 60 минут
Итоговый	Экзамен				*	Письменная работа 60 минут с последующим собеседованием

Критерии оценки знаний, навыков

При письменном ответе на теоретический вопрос студент должен продемонстрировать уровень знаний основных определений, теорем, методов и пр., доказательств некоторых теоретических положений курса. При решении практической задачи студент должен показать умение применить теоретические факты к решению данной задачи, продемонстрировать навыки решения данного класса задач.

При проведении контролей осуществляется выдача индивидуальных заданий.

Оценки по всем формам текущего и итогового контроля выставляются по 10-ти балльной шкале:

высшая оценка в 9 баллов (10 баллов проставляется в исключительных случаях) проставляются при отличном выполнении заданий: полных (с детальными или многочисленными

примерами и возможными обобщениями) ответах на вопросы, правильном решении задачи и четком и исчерпывающем ее представлении,

почти отличная оценка в 8 баллов проставляется при полностью правильных ответах и решении задач, но при отсутствии какого-либо из выше перечисленных отличительных признаков, как, например: детальных примеров или обобщений, четкого и исчерпывающего представления решаемой задачи,

оценка в 7 баллов проставляется при правильных ответах на вопросы и правильном решении задачи, но при отсутствии пояснений, примеров, обобщений, без представления алгоритма или последовательности решения задач,

оценка в 6 баллов проставляется при наличии отдельных неточностей в ответах на вопросы (включая грамматические ошибки) или неточностях в решении задачи непринципиального характера (описки и случайные ошибки арифметического характера),

оценка в 5 баллов проставляется в случаях, когда в ответах и в решении задач имеются неточности и ошибки, свидетельствующие о недостаточном понимании вопросов и требующие дополнительного обращения к тематическим материалам,

оценка в 4 балла проставляется при наличии серьезных ошибок и пробелов в знании по контролируемой тематике,

оценка в 3 балла проставляется при наличии лишь отдельных положительных моментов в ответах на вопросы и в решении задач, говорящих о потенциальной возможности в последующем более успешно выполнить задания; оценка в 3 балла, как правило, ведет к повторному написанию ответов на вопросы или решению дополнительной задачи,

оценка в 2 балла проставляется при полном отсутствии положительных моментов в ответах на вопросы и решении задач и, как правило, ведет к повторному написанию контрольной работы в целом,

оценка в 1 балл проставляется, когда неправильные ответы и решения, кроме того, сопровождаются какими-либо демонстративными проявлениями безграмотности или неэтичного отношения к изучаемой теме.

Порядок формирования оценок по дисциплине

Преподаватель оценивает работу студентов на семинарских занятиях - $O_{аудиторная}$: оценивается правильность решения задач. Оценки за работу на семинарских занятиях преподаватель выставляет в рабочую ведомость. Результирующая оценка по 10-ти балльной шкале за работу на семинарских занятиях также заносится в рабочую ведомость.

Накопленная оценка за текущий контроль в 1и 2 модулях учитывает результаты студента по текущему контролю следующим образом:

$O_{накопленная1} = (O_{ДЗ1}+O_{аудиторнная})/2$, где

$O_{ДЗ1}$ - оценка за письменную домашнюю работу 1,

$O_{аудиторнная}$ - оценка за работу на семинарских занятиях.

Результирующая оценка за промежуточный контроль в форме экзамена в конце 2 модуля выставляется по следующей формуле:

$O_{промежуточный} = 0,5 \cdot O_{экзамен} + 0,5 \cdot O_{накопленная1}$, где

$O_{экзамен}$ – оценка за письменную экзаменационную работу.

Накопленная оценка за текущий контроль в 3 и 4 модулях учитывает результаты студента по текущему контролю следующим образом:

$O_{накопл2} = (O_{ДЗ2} + O_{аудиторнная})/2$, где

$О_{ДЗ2}$ - оценка за письменную домашнюю работу 2,

$О_{аудиторнная}$ - оценка за работу на семинарских занятиях.

Результирующая оценка за дисциплину рассчитывается следующим образом:

$О_{Результ\ Итог} = 0{,}4 \cdot О_{Накопл2} + 0{,}6 \cdot О_{Итог\ экзамен}$, где

$О_{Итог\ экзамен}$ – оценка за итоговую экзаменационную письменную работу.

Способ округления результирующей оценки по учебной дисциплине: в пользу студента.

На пересдаче студенту не предоставляется возможность получить дополнительный балл для компенсации оценки за текущий контроль.

В диплом выставляет результирующая оценка по учебной дисциплине, которая формируется равной результирующей оценке за последний модуль последнего года проведения дисциплины.

Содержание дисциплины

1. Введение в анализ. Элементы теории множеств и функций

Понятие множества. Операции над множествами. Понятие отображения (функции), области определения и множества значений. Обратная функция. Композиция функций (сложная функция). График функции. Элементарные функции: классификация, простейшие свойства, графики.

Количество часов аудиторной работы – 4.
Литература по разделу: [1] (том 1, Главы 1, 2), [2], [4] (том 1).
Формы и методы проведения занятий по разделу, применяемые учебные технологии: чтение лекций, проведение практических занятий.

2. Предел последовательности.

Определение числовые последовательности. Примеры. Понятие предела последовательности. Теорема о единственности предела сходящейся последовательности. Достаточное условие отсутствие предела последовательности. Ограниченные и неограниченные последовательности. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности. Теорема о переходе к пределу в неравенствах. Лемма о конвоирующих. Теорема о сходимости монотонных ограниченных последовательностей. Определение числа *е*. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Связь со сходящимися последовательностями. Арифметические свойства бесконечно малых и сходящихся последовательностей. Арифметические свойства для последовательностей, имеющих конечные и бесконечные пределы. Неопределенные выражения, методы раскрытия неопределенностей.

Количество часов аудиторной работы – 14.
Литература по разделу: [1] (том 1, Глава 3), [2], [4] (том 1).
Формы и методы проведения занятий по разделу, применяемые учебные технологии: чтение лекций, проведение практических занятий.

3. Предел функции.

Определение предела функции в точке по Коши (в терминах окрестностей и неравенств) и по Гейне (в терминах последовательностей). Теорема об эквивалентности этих определений. Пределы функции в бесконечности. Арифметические свойства функций, имеющих пределы (конечные или бесконечные) в точке или в бесконечности. Односторонние пределы. Достаточное условие отсутствие предела в точке. Неопределенные выражения. Теорема о пределе сложной функции. Первый и второй замечательные пределы. Сравнение бесконечно малых функций, *o*-символика. Эквивалентность бесконечно малых.

Количество часов аудиторной работы – 20.
Литература по разделу: [1] (том 1, Глава 4), [2], [4] (том 1).
Формы и методы проведения занятий по разделу, применяемые учебные технологии: чтение лекций, проведение практических занятий.

4. Непрерывные функции.

Определения непрерывности функции в точке, их эквивалентность. Арифметические свойства непрерывных функций. Теорема о непрерывности сложной функции. Теорема о локальной ограниченности функции, непрерывной в точке. Свойства функций, непрерывных на отрезке (первая и вторая теоремы Вейерштрасса, первая и вторая теоремы Больцано-Коши). Теорема о непрерывности монотонной функции на промежутке. Критерий существования и непрерывности обратной функции на промежутке. Точки разрыва, их классификация.

Количество часов аудиторной работы – 10.
Литература по разделу: [1] (том 1, Глава 4), [2], [4] (том 1).
Формы и методы проведения занятий по разделу, применяемые учебные технологии: чтение лекций, проведение практических занятий.

5. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.

Понятие производной функции в точке. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной и нормали к графику функции в точке. Правила дифференцирования. Теорема о дифференцируемости и производной сложной функции. Теорема о дифференцируемости и производной обратной функции. Таблица производных основных элементарных функций. Производные функций, заданных параметрически. Производная неявно заданной функции. Понятие дифференцируемости функции в точке. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости. Понятие первого дифференциала функции в точке. Геометрический смысл дифференциала. Инвариантность формы первого дифференциала. Производные и дифференциалы высших порядков функции одной переменной в точке. Экстремумы функции одной переменной. Локальный и глобальный экстремум. Необходимое и достаточное условия для внутреннего локального экстремума. Основные теоремы о дифференцируемых функций на отрезке (теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши). Правило Лопиталя-Бернулли. Достаточное условие строгого возрастания (убывания) функции на промежутке. Достаточные условия локального экстремума для функции одной переменной. Выпуклые (вогнутые) функции одной переменной. Достаточные условия выпуклости (вогнутости). Точки перегиба. Необходимые и достаточные условия для точки перегиба. Асимптоты графика функции одной переменной. Многочлен Тейлора и формула Тейлора для функций одной переменной с остаточным членом в форме Пеано и Лагранжа. Формулы Тейлора-Маклорена для основных элементарных функций.

Количество часов аудиторной работы – 24.
Литература по разделу: [1] (том 1, Глава 5, 8, 9), [2], [4] (том 1).
Формы и методы проведения занятий по разделу, применяемые учебные технологии: чтение лекций, проведение практических занятий.

6. Интегральное исчисление функций одной переменной.

Понятие первообразной и неопределенного интеграла функции, определенной на промежутке. Замена переменных и формула интегрирования по частям. Таблица интегралов элементарных функций. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование тригонометрических выражений (сведение в интегрированию рациональных функций). Интегрирование иррациональных выражений. Понятие интегральной суммы для функции, заданной на отрезке, и определенного интеграла. Необходимое условие интегрируемости функции на отрезке. Основные свойства определенного интеграла: интеграл единицы, линейность, интегрируемость произведения интегрируемых функций, аддитивность, интегрируемость на подотрезках, свойства, выражаемые неравенствами, теоремы о среднем, интегрируемость модуля интегрируемой функции. Интеграл с переменным верхним пределом. Теоремы о непрерывности и дифференцируемости интеграла с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменных и формула интегрирования по частям для определенного интеграла. Приложение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур, объемов тел вращения, длин дуг плоских кривых. Понятие несобственных интегралов первого и второго рода. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла. Понятия абсолютной и условной сходимости несобственного интеграла. Признаки сравнения в непредельной и предельной формах для несобственных интегралов от положительных функций. Эталонные интегралы. Признак Дирихле сходимости несобственного интеграла первого рода.

Количество часов аудиторной работы – 20.
Литература по разделу: [1] (том 1, Главы 6, 7, 8, 10, 11, том 2, глава 3), [2], [4] (том 2).
Формы и методы проведения занятий по разделу, применяемые учебные технологии: чтение лекций, проведение практических занятий.

7. Дифференциальное исчисление функций многих переменных.

Понятие метрического и нормированного пространств, окрестностей точки, предельных и внутренних точек, открытых и замкнутых множеств. Понятие n-мерного евклидова пространства и метрики в нем. Неравенство треугольника. Сферические и прямоугольные окрестности точки. Связные, несвязные, ограниченные, неограниченные множества. Замкнутые, открытые, компактные множества. Понятие функции многих переменных. Определение предела функции многих переменных. Арифметические свойства пределов. Понятие непрерывности функции многих переменных в точке. Свойства непрерывных функций. Теорема о непрерывности сложной функции. Непрерывность элементарных функций многих переменных. Теоремы Вейерштрасса. Теорема Коши о промежуточных значениях непрерывной функции. Определение частных производных функции многих переменных в точке. Определение дифференцируемости функции в точке. Первое и второе необходимые условия дифференцируемости функции в точке. Достаточное условие дифференцируемости функции в точке. Арифметические свойства дифференцируемых функций. Теорема о дифференцируемости сложной функции. Уравнение касательной плоскости и нормали к графику функции двух переменных в точке. Понятие первого дифференциала функции многих переменных в точке. Геометрический смысл первого дифференциала для функции двух переменных. Инвариантность формы первого дифференциала. Частные производные и дифференциалы высших порядков функции многих переменных. Теорема о равенстве смешанных производных. Производная по направлению для функций двух и трех переменных. Градиент функций двух и трех переменных в точке. Понятие неявной функции, определяемой уравнением. Терема о существовании и дифференцируемости неявной функции. Формула для производных неявной функции. Экстремумы функций многих переменных: абсолютный и условный; локальный и глобальный. Необходимое условие локального экстремума. Достаточное условие локального экстремума в терминах второго дифференциала. Функция Лагранжа и множители

Лагранжа для задачи на условный экстремум. Необходимое условие локального условного экстремума, его геометрическая интерпретация. Достаточное условие.

Количество часов аудиторной работы – 18.
Литература по разделу: [1] (том 2, Глава 14), [2], [4] (том 3).
Формы и методы проведения занятий по разделу, применяемые учебные технологии: чтение лекций, проведение практических занятий.

8. Интегральное исчисление для функций многих переменных.

Понятие интегральной суммы для функции двух переменных, определенной на замкнутом квадрируемом множестве. Понятие двойного интеграла для функции двух переменных. Необходимое условие интегрируемости функции двух переменных. Суммы Дарбу, их свойства. Необходимое и достаточное условие интегрируемости функции двух переменных. Классы интегрируемых функций. Свойства двойного интеграла, неравенство Коши-Буняковского. Теорема о сведении двойного интеграла к повторному и ее применение для вычисления двойного интеграла. Замена переменных в двойных интегралах. Переход к полярным координатам в двойных интегралах. Понятие о кубируемости и объеме множества в пространстве. Необходимое и достаточное условие кубируемости множества в пространстве. Понятие тройного интеграла для функции трех переменных. Необходимое условие интегрируемости функции трех переменных. Основные классы интегрируемых функций. Основные свойства тройного интеграла. Теорема о сведении тройного интеграла к повторному и ее применение для вычисления тройного интеграла. Замена переменных в тройных интегралах. Переход к цилиндрическим и сферическим координатам в тройных интегралах. Понятие криволинейного интеграла первого рода для функции трех переменных. Необходимое условие интегрируемости функции трех переменных. Основные свойства криволинейного интеграла первого рода. Теорема о сведении криволинейного интеграла первого рода к определенному. Понятие скалярного и векторного поля. Понятие криволинейного интеграла второго рода по дуге гладкой кривой. Сведение криволинейного интеграла второго рода к определенному. Формула Грина.

Количество часов аудиторной работы – 16.
Литература по разделу: [1] (том 2, Главы 2, 4), [2], [4] (том 3).
Формы и методы проведения занятий по разделу, применяемые учебные технологии: чтение лекций, проведение практических занятий.

9. Числовые и функциональные ряды.

Понятие числового ряда, сходящегося ряда, суммы ряда. Критерий Коши сходимости ряда. Необходимое условие сходимости ряда. Понятие абсолютной и условной сходимости числового ряда. Необходимое и достаточное условие абсолютной сходимости ряда. Знакоположительные числовые ряды. Признаки сравнения в непредельной и предельной формах для положительных рядов. Признаки Даламбера и Коши. Интегральный признак Коши. Эталонные положительные ряды. Признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов. Функциональные последовательности и ряды. Степенной ряд. Радиус сходимости степенного ряда. Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании степенного ряда. Теорема о единственности представления. Ряд Тейлора функции. Необходимое и достаточное условие сходимости ряда Тейлора для заданной функции к заданной функции. Ряды Тейлора-Маклорена основных элементарных функций.

Количество часов аудиторной работы – 18.
Литература по разделу: [1] (том 1, Глава 13, том 2 глава 1), [2], [4] (том 2).
Формы и методы проведения занятий по разделу, применяемые учебные технологии: чтение лекций, проведение практических занятий.

Образовательные технологии

В учебном процессе используются повторение основных положений лекционного материала, разбор и решение типовых практических задач.

Методические рекомендации преподавателю

Материал следует представлять в максимально доступной, понятной форме, теоретические результаты необходимо сопровождать демонстрацией простых модельных примеров.

Методические указания студентам

Следует систематически посещать лекционные и семинарские занятия. Материалы этих занятий следует внимательно изучать и регулярно выполнять домашние задания.

При подготовке к семинарским занятиям и выполнении контрольных заданий студентам следует использовать литературу из приведенного в данной программе списка, а также руководствоваться указаниями и рекомендациями преподавателя.

Перед каждым семинарским занятием студент изучает план семинарского занятия с перечнем тем и вопросов, списком литературы и домашним заданием по вынесенному на семинар материалу. Студенту рекомендуется следующая схема подготовки к семинарскому занятию:

1. проработать конспект лекций;
2. проанализировать основную и дополнительную литературу, рекомендованную по изучаемому разделу;
3. изучить решения типовых задач;
4. решить заданные домашние задания;
5. при затруднениях сформулировать вопросы к преподавателю.

Самостоятельная работа студентов осуществляется в соответствии с «Методическими рекомендациями по организации самостоятельной работы студентов НИУ ВШЭ – Нижний Новгород», утвержденными УМС от 30.04.2014, протокол № 4.

Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

Тематика заданий текущего контроля

Примерные типы заданий для контрольных работ:

1. Найти предел числовой последовательности.
2. Найти предел числовой функции. Исследовать функцию на непрерывность.
3. Вычислить производную функции.
4. Исследовать функцию на монотонность и наличие экстремумов.
5. Исследовать характер выпуклости функции и наличие точек перегиба.
6. Найти асимптоты функции.
7. Построить график функции.
8. Написать формулу Тейлора для данной функции.
9. Вычислить неопределенный интеграл.
10. Вычислить определенный интеграл Римана.
11. Вычислить площадь фигуры, объем тела вращения, длину кривой.
12. Найти частные производные функции многих переменных.
13. Найти локальные и глобальные экстремумы функции многих переменных.
14. Вычислить двойной интеграл
15. Исследовать числовой ряд на сходимость. Вычислить сумму ряда.
16. Исследовать функциональный ряд на сходимость. Вычислить сумму ряда.

Тематика заданий домашних работ

1.Исследование числовых последовательностей на монотонность, ограниченность. Вычисление пределов числовых последовательностей.

2.Вычисление пределов функций. Исследование функций на непрерывность и дифференцируемость. Разложение функции по формуле Тейлора.

3.Полное исследование функции и построение графика.

4.Вычисление неопределенных и определенных интегралов. Приложения определенных интегралов.

5.Вычисление кратных и повторных пределов функций многих переменных.

Нахождение частных производных. Решение задач на нахождение локальных и условных экстремумов функций многих переменных.

1. Исследование числовых рядов на абсолютную и условную сходимость.

Примеры типовых практических задач.

1. Предел последовательности. .

1.Исследовать на монотонность последовательность $\left\{\frac{2n^2+4n+2}{2n^2+4n+1}\right\}$

2.Вычислить пределы последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3}{\left(n^2+1\right)^2-\left(n-3\right)^4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^2}\cdot\left(\sqrt[3]{n+3}-\sqrt[3]{n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[4]{n}\cdot\left(\sqrt[4]{n+3}-\sqrt[4]{n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n-3}{n^2+n+3}\right)^{1-2n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3+4+5+\mathrm{K}+n}$$

2. Предел функции.

Найти предел функции:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+4x}-\sqrt[3]{1+8x}}{\sqrt{1+x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\left(2x+x^2\right)}{\ln\left(e-x\right)-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(2-e^{-2x}-\sin 4x\right)^{1/\operatorname{arctg}3x}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}{5\cdot 4^x-4\cdot 5^x}$$

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$$

3. Непрерывные функции.

1.Исследовать на непрерывность функцию $y=\cos 4x$ при $x\in R$.

2.Исследовать на непрерывность функцию $y=\dfrac{1}{1+2^{1/x}}$ в точке $x=0$.

4. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.

2. Вычислить производную y'_x:

1) $y=\dfrac{\sin x+\sqrt{x^2+2x}}{x^3+7x}$

2) $y=(x^2+4)^{tgx}$

3) $xy^2+\sin y=3^{y+1}$

3. Вычислить производные y'_x и y''_{xx}:

$$\begin{cases} x=2^{t+1} \\ y=tg(t) \end{cases},$$

4. Для функции $y=\dfrac{1}{x^2-4}$,

a) найти экстремумы, указать промежутки монотонности,
b) найти точки перегиба, указать промежутки выпуклости/вогнутости,
c) найти асимптоты (вертикальные и наклонные),
d) схематично построить график функции .

5. Вычислить предел , используя известные разложения по формуле Тейлора :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{\sin 2x-tg2x},$$

6. Найти многочлен Тейлора степени 4 по степеням $x-x_0$ для функции

$y=(x-2)\ln(x-1)-x^2+4x-1,\ x_0=2$

5. Интегральное исчисление функций одной переменной.

1. Вычислить неопределенный интеграл.

$$\int\frac{x^2+9x-12}{x^3-x^2-9x+9}$$

2. Вычислить определенный интеграл.

$$\int_0^1\frac{\sqrt{x^{13}}dx}{x^{15}+1}$$

3. Выяснить характер сходимости несобственного интеграла

$$\int_2^\infty\ln\left(\frac{x^3+2x-1}{x^3-2x+1}\right)dx$$

4. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси oy фигуры, ограниченной графиками функций $y=\dfrac{1}{1+4x^2}, y=0, 0\le x\le 1.$

5.Найти длину дуги кривой $y = \ln(\cos x), 0 < x < \frac{\pi}{4}$.

6. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.

1.Найти частные производные первого порядка $z(x,y) = \arcsin\sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$

2.Найти все частные производные второго порядка функции $f(x,y,z)$, если $f = \sin(xy + yz + xz)$.

3. Исследовать функцию на наличие экстремумов. Сформулировать необходимое и достаточное условия экстремума функции многих переменных.

$z(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y + 3$

4. Найти условные экстремумы функции относительно заданных уравнений связи:

$z(x,y) = 1 - 4x - 8y,\ x^2 - 8y^2 = 8.$

7.Числовые и функциональные ряды.

1. Исследовать на сходимость числовой ряд.

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}$

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость числовой ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\sqrt[8]{n+8}}{n+1} \right).$

Вопросы для оценки качества освоения дисциплины

Перечень теоретических вопросов по всему курсу:

1. Множество. Отношения включения и равенства множеств. Операции над множествами: объединение, пересечение, разность, дополнение, прямое (декартово) произведение. Нижняя и верхняя грани числового множества.
2. Понятие отображения (функции). Классификация отображений. Обратное отображение. Композиция отображений. Свойства отображений. График функции.
3. Определение предела последовательности. Единственность предела. Ограниченность сходящейся последовательности.
4. Предельный переход и отношение неравенства.
5. Свойства бесконечно малых последовательностей. Арифметические операции над пределами.
6. Критерий существования предела монотонной последовательности. Важные примеры монотонных последовательностей и их пределы.
7. Число *e*.
8. Подпоследовательность. Частичные пределы последовательности. Достаточное условие отсутствия предела.
9. Критерий Коши сходимости последовательности.
10. Различные определения предела функции. Примеры пределов. Связь с пределом последовательности.
11. Свойства предела функции: предел постоянной, единственность предела, ограниченность функции, имеющей предел.

12. Предельный переход и отношения неравенства для функций.
13. Предельный переход и арифметические операции для функций.
14. Первый замечательный предел.
15. Критерий Коши существования предела функции.
16. Связь предела функции с односторонними пределами в конечной точке и бесконечности.
17. Второй замечательный предел и его следствия.
18. Критерий существования предела монотонной функции.
19. Сравнение бесконечно малых функций. *o*-символика. Таблица эквивалентных функций. Примеры вычисления пределов.
20. Эквивалентные определения непрерывной функции. Связь с пределом функции. Примеры непрерывных функций.
21. Локальные свойства непрерывных функций.
22. Точки разрыва. Классификация точек разрыва. Примеры.
23. Теорема Больцано-Коши о промежуточном значении для непрерывных функций и ее следствие.
24. Теорема Вейерштрасса о максимальном и минимальном значениях непрерывной функции на отрезке вещественной прямой.
25. Критерий непрерывности монотонной функции на отрезке.
26. Теорема об обратной функции (для непрерывных функций). Непрерывность элементарных функций.
27. Определение производной функции в точке.
28. Определение дифференцируемости функции в точке. Дифференциал. Связь с непрерывностью. Геометрический и механический смысл производной и дифференциала.
29. Дифференцирование и арифметические операции. Следствия для дифференциалов.
30. Дифференцирование композиции функций. Следствие для дифференциалов.
31. Дифференцирование обратной функции. Примеры. Таблица производных.
32. Производные высших порядков. Правило дифференцирования Лейбница.
33. Лемма Ферма и теорема Ролля.
34. Теорема Лагранжа, ее геометрический смысл и следствия.
35. Теорема Коши из дифференциального исчисления.
36. Правило Лопиталя.
37. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.
38. Локальная формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.
39. Единственность многочлена Тейлора. Основные асимптотические формулы. Примеры вычисления пределов.
40. Условия монотонности функции в терминах производных. Необходимое и достаточное условия внутреннего локального экстремума.
41. Достаточные условия внутреннего локального экстремума в терминах высших производных.
42. Выпуклые функции и их свойства.
43. Точки перегиба и их нахождение. Асимптоты. Схема построения графика функции.
44. Первообразная и неопределенный интеграл. Общие приемы отыскания неопределенного интеграла.
45. Интегрирование дробно-рациональных функций.
46. Интегрирование иррациональных функций.
47. Интегрирование тригонометрических функций.
48. Подстановки Эйлера.
49. Определенный интеграл Римана. Задачи, приводящие к понятию интеграла Римана.
50. Определение интеграла Римана, критерий Коши его существования, необходимое условие интегрируемости функции по Риману.
51. Достаточные условия интегрируемости функции по Риману.
52. Интегральные суммы Дарбу, их свойства и теорема Дарбу.
53. Свойства определенного интеграла.
54. Неравенства для интеграла и теоремы о среднем для интеграла.

55. Дифференцирование интеграла с переменным верхним пределом. Существование первообразных.
56. Формула интегрирования по частям и замена переменной в определенном интеграле.
57. Применения интеграла Римана: длина пути, площадь криволинейной трапеции и объем тела вращения.
58. Понятие о несобственных интегралах. Примеры вычисления несобственных интегралов.
59. Метрическое пространство *R^n.* . Открытые, замкнутые, ограниченные и компактные множества в этом пространстве.
60. Пределы функций многих переменных. Повторные пределы.
61. Непрерывные функции многих переменных, их локальные свойства. Примеры.
62. Определение дифференциала функции многих вещественных переменных в точке и его единственность.
63. Дифференциал и частные производные функции многих переменных.
64. Достаточное условие дифференцируемости функции многих переменных.
65. Теорема о равенстве смешанных частных производных.
66. Безусловный и условный экстремумы функции многих переменных.
67. Локальные экстремумы функций многих переменных. Необходимое и достаточное условия внутреннего локального экстремума.
68. Числовой ряд и его сумма. Критерий Коши сходимости ряда. Необходимый признак сходимости ряда.
69. Абсолютная сходимость. Критерий сходимости неотрицательного ряда. Теорема сравнения для рядов. Признак сходимости Вейерштрасса.
70. Признаки сходимости Коши и Даламбера.
71. Признаки сходимости Дирихле, Абеля и Лейбница.

Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

1.1 Основная литература

1. Ильин, В. А. Основы математического анализа: учебник : в 2 ч. / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. Гриф МО РФ

2. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа в 3 т. [электронный ресурс] Т.1: учебник для бакалавров / Л.Д.Кудрявцев; ЭБС Юрайт. – 6-е изд., перераб. и доп. – М.: Юрайт, 2014. – 703 с.. – (Бакалавр. Академический курс). - ISBN 978-5-9916-3690-2, 978-5-9916-2293-6. - Режим доступа: http://www.biblio-online.ru/thematic/?2&id=urait.content.EF201CDD-4456-425B-B836-5BC73BF422E2&type=c_pub. - Загл. с экрана Гриф МО РФ
3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа в 3 т. [электронный ресурс] Т.2: учебник для бакалавров / Л.Д.Кудрявцев; ЭБС Юрайт. – 6-е изд., перераб. и доп. – М.: Юрайт, 2014. – 719 с. – (Бакалавр. Академический курс). - ISBN 978-5-9916-4062-6, 978-5-9916-2293-6. - Режим доступа: http://www.biblio-online.ru/thematic/?4&id=urait.content.76333282-3EB9-4F5D-BFA0-9F9BCA503804&type=c_pub. - Загл. с экрана. Гриф МО РФ
4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: в 3 т. [Электронный ресурс]. Т.3: учебник для бакалавров / Л.Д.Кудрявцев; ЭБС Юрайт. – 6-е изд., перераб. и доп. – М.: Юрайт, 2014. – 351 с. – (Бакалавр. Академический курс). - ISBN 978-5-9916-4063-3, 978-5-9916-2293-6. - Режим доступа: http://www.biblio-online.ru/thematic/?6&id=urait.content.16B0DDFA-4C52-4ADD-B899-2355A8B4A011&type=c_pub/ - Загл. с экрана. Гриф МО РФ

1.2 Дополнительная литература

5. Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализа: учебник: в 2 т./ Л.Д.Кудрявцев.- 3-е изд.; перераб. ФИЗМАТЛИТ, 2002. Гриф МО РФ

6. Математический анализ в вопросах и задачах: Учебное пособие / В. Ф. Бутузов [и др.]; Под ред. В.Ф.Бутузова. - 4-е изд. ; испр. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. Гриф МО РФ
7. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: ФИЗ-МАТЛИТ, 2001 (в 3-х томах)
8. Кудрявцев Л., Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003 (в 3-х томах).

1.3 Программные средства

Для проверки правильности решения задач и построения графиков, а также для упрощения вычислений, студент может использовать следующие программные средства: Maple, MathCad, Mathematica

1.4 Интернет-ресурсы

1.Общероссийский математический портал [Электронный ресурс]: информационная система. – Режим доступа: http://www.mathnet.ru/

2.Физико-математический ресурс EqWorld [Электронный ресурс]: база данных. – Режим доступа: http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm

3.Математика на страницах www [Электронный ресурс] : база данных. – Режим доступа: http://www.nsc.ru/win/mathpub/math_www.html

4.Российское образование [Электронный ресурс]: Федеральный образовательный портал. – Режим доступа: http://www.edu.ru

5.Единое окно доступа к образовательным ресурсам [Электронный ресурс]: база данных. – Режим доступа: http://window.edu.ru/window

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

При осуществлении образовательного процесса по дисциплине используется следующая материально-техническая база:

1. Лекционные занятия:

а) лекционный зал с мультимедиа оборудованием;

б) маркерная или обычная доска.

2. Самостоятельная работа:

а) рабочее место преподавателя, оснащенное компьютером с доступом в Интернет;

б) рабочие места студентов, оснащенные компьютером с доступом в Интернет

Разработчик программы С. А. Чистякова