

Задача 1.

$N = 10^3$ электронов вращаются со скоростью $v = 10$ м/с по кольцу радиуса $R = 0.5$ м, электроны равномерно распределены по кольцу. Найти индукцию магнитного поля, которое электроны создают в центре кольца.

Решение

Ток, который течет по кольцу, равен $I = Nev/(2\pi R)$, где $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд электрона. Выражение получено в соответствии с определением тока, согласно которому ток равен заряду, протекающему в единицу времени через сечение провода. По закону Био - Савара

- Лапласа элемент кольца длиной dl создает в центре кольца индукцию магнитного поля

$$dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi R^2}, \quad (1)$$

направленную перпендикулярно плоскости кольца. Здесь $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Н/А² – магнитная постоянная. Суммируя по всем элементам, что сводится к замене dl на $2\pi R$ в (1), находим

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 Nev}{4\pi R^2}. \quad (2)$$

Подставляя сюда численные значения, находим $B = 6.4 \cdot 10^{-22}$ Тл.

Задача 2.

Найти энергию основного состояния системы протон-мюон. Пояснение: мюон имеет такие же характеристики, как и электрон, но его масса m_μ в 207 раз больше, чем масса электрона m_e .

Решение

Как известно, энергия основного состояния атома водорода, то есть системы протон-электрон, равна

$$E = m_e e^4 / (8h^2 \epsilon_0^2). \quad (3)$$

Здесь ϵ_0 – электрическая постоянная, h – постоянная Планка, e – заряд электрона, а m_e – масса электрона. Та же формула дает энергию связи в системе протон-мюон, если в ней заменить массу электрона m_e на массу мюона m_μ . Поскольку последняя в 207 раз больше,

чем масса электрона, а энергия связи системы протон-электрон равна 13.6 эв, то энергия связи системы протон-мюон равна $207 \cdot 13.6 = 2.8 \cdot 10^3$ эв.

Задача 3.

Найти силу, с которой притягивается к плоской металлической поверхности молекула воды, если она расположена от поверхности на расстоянии $R=10$ нм, а ее дипольный момент перпендикулярен поверхности. Примечание: дипольный момент молекулы воды равен $d = 1.6 \cdot 10^{-29}$ Кл · м.

Решение

Электрическое поле металла вне его эквивалентно электрическому полю “диполя-отражения”, который расположен зеркально симметрично молекуле воды (относительно поверхности) и имеет противоположный воде дипольный момент (поскольку суперпозиция поля молекулы воды и “диполя-отражения” имеет напряженность, во всех точках перпендикулярную поверхности металла). Напряженность поля диполя равна

$$\mathbf{E} = \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}) - \mathbf{d}}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (4)$$

Здесь \mathbf{d} – дипольный момент диполя, r – расстояние до точки наблюдения, \mathbf{n} – единичный вектор, направленный из точки расположения диполя в точку наблюдения, ϵ_0 – электрическая постоянная, $1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9$

м/Ф. Нас интересует поле “диполя-отражения” в точке расположения молекулы воды. В этом случае $r = 2R$, n перпендикулярен d . Поэтому напряженность поля “диполя-отражения” в точке расположения молекулы воды равна $E = d/(4\pi\epsilon_0 \cdot 8R^3)$ и направлена вдоль дипольного момента. Умножая эту величину на дипольный момент воды, находим энергию взаимодействия молекулы воды с металлом

$$U = -\frac{d^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 8R^3}. \quad (5)$$

Дифференцируя это выражение по R , находим силу притяжения

$$F = \frac{3d^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 8R^4}. \quad (6)$$

Подставляя сюда численные значения, находим $F = 8.6 \cdot 10^{-17}$ н.

Задача 4.

Электрон находится во внешнем однородном магнитном поле, имея нулевой импульс вдоль напряженности поля. Энергия второго возбужденного состояния электрона в этом магнитном поле равна 1 эв. Найти энергию второго возбужденного состояния мюона в том же магнитном поле. Пояснение: мюон имеет такие же характеристики, как и электрон, но его масса в 207 раз больше, чем масса электрона.

Решение

Поперечное движение электрона во внешнем магнитном поле квантуется, его энергетический спектр в системе СГС имеет вид

$$E_n = \frac{\hbar e B}{m_e c} (n + 1/2). \quad (7)$$

Здесь \hbar – постоянная Планка, e – заряд электрона, B – индукция магнитного поля, m_e – масса электрона, c – скорость света, n – целое число. Выражение для энергетического спектра мюона отличается от (7) заменой массы электрона m_e на массу мюона m_μ . Поскольку последняя в 207 раз тяжелее, энергия мюона будет в 207 раз меньше, то есть примерно $5 \cdot 10^{-3}$ эв.

Задача 5.

За счет осаждения молекул поверхностно-активного вещества на поверхность воды ее поверхностное натяжение изменилось с 60 эрг/см^2 до 30 эрг/см^2 . Во сколько раз изменится при этом длина поверхностной волны частоты $\nu=100 \text{ Гц}$?

Решение

При частоте $\nu=100 \text{ Гц}$ поверхностная волна находится в капиллярном диапазоне. В этом случае закон дисперсии поверхностных волн имеет вид

$$\rho(2\pi\nu)^2 = \sigma(2\pi/\lambda)^3. \quad (8)$$

Здесь ρ – плотность массы жидкости, ν – частота волны, σ – коэффициент поверхностного натяжения, λ –

длина волны. Поскольку частота волны фиксирована, при уменьшении коэффициента поверхностного натяжения в два раза, длина волны в соответствии с (8) уменьшится в $2^{1/3} \approx 1.26$ раз.

Задача 6.

Электрон выбивается из металла фотоном и движется после этого со скоростью $v=1000$ км/с. Найти частоту фотона, если работа выхода из металла равна $A=2$ эв.

Решение

Энергия фотона расходуется на работу выхода и потенциальную энергию электрона, то есть

$$h\nu = A + m_e v^2 / 2. \quad (9)$$

Подставляя сюда численные значения для постоянной Планка $h = 6.23 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, $A = 3.2 \cdot 10^{-19}$ Дж, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ Кг, $v = 10^6$ м/с, находим $\nu \approx 2 \cdot 10^{15}$ Гц.

Задача 7.

В двух сосудах объемом по 20 л при нормальных условиях находятся аргон (в одном сосуде) и кислород (в другом сосуде). Как изменится энтропия системы, если открыть кран на трубке, соединяющей сосуды? Теплообменом с окружающей средой пренебречь.

Решение

Поскольку никакой работы система не совершает и ее теплообмен с окружающей средой отсутствует, внутренняя энергия газов не меняется, то есть температура после открытия крана не меняется. Изменение энтропии идеального газа на один моль при постоянной температуре равно $-R \ln(P_2/P_1)$, где P_1 и P_2 начальное и конечное давление газов, а $R = 8.3$ Дж/(моль·К) – газовая постоянная. Поскольку в процессе перемешивания парциальные давления газов падает вдвое, энтропия системы возрастает на $\nu R \ln 2$, где ν – суммарное число молей газов. Поскольку газы находятся при нормальных условиях, число молей можно найти, как $40 \text{ л} / 22.4 \text{ л} \approx 1.8$. Поэтому изменение энтропии приблизительно равно $1.8 \text{ моль} \cdot R \ln 2 \approx 10$ Дж/К.

Задача 8.

Атом калия находится в оптической ловушке, потенциал которой описывается выражением $U = kr^2/2$, где r - расстояние до центра ловушки, $k = 10^{-3}$ эв/нм². Найти энергию основного состояния атома калия с атомным весом 39.

Решение

Частота колебаний атома калия равна $\omega = \sqrt{k/m}$. Поскольку атом обладает тремя степенями свободы, энергия его основного состояния равна $E_0 = 3/2\hbar\omega = 3/2\hbar\sqrt{k/m}$. Подставляя сюда значения $k = 1.6 \cdot 10^{-4}$ Дж/м², $m \approx 6.5 \cdot 10^{-26}$ Кг, $\hbar \approx 1.05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, находим $E_0 \approx 0.8 \cdot 10^{-23}$ Дж.

Задача 9.

Металлическая сферическая гранула радиусом 100 нм находится в диэлектрической матрице с $\epsilon = 2$. На грануле находятся 100 избыточных электрона. Какую работу надо совершить, чтобы поместить на гранулу еще один электрон?

Решение

Емкость гранулы равна $C = 4\pi\epsilon_0\epsilon$. Поэтому ее потенциал равен $V = q/C = 100e/C$. Здесь e – заряд электрона. Следовательно, чтобы поместить на гранулу еще один электрон, надо совершить работу $A = 100e^2/\epsilon(4\pi\epsilon_0)^{-1}$.

Подставляя сюда $(4\pi\epsilon_0)^{-1} = 9 \cdot 10^9$ м/Ф, $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл, находим $A \approx 1.15 \cdot 10^{-26}$ Дж.

Задача 10.

Найти энергию основного состояния нейтрона в квадратном ящике с непроницаемыми стенками размером $1 \times 1 \times 1$ см. Примечание: масса нейтрона равна $m = 1.7 \cdot 10^{-27}$ кг.

Решение

Основное состояние нейтрона имеет Ψ – функцию

$$\Psi \propto \sin(\pi x/L) \sin(\pi y/L) \sin(\pi z/L), \quad (10)$$

где $L = 1\text{см}$ – размер ящика. Энергия этого состояния вычисляется, как собственное значение оператора кинетической энергии $-\hbar^2\Delta/(2m)$, что дает $E = 3\pi^2\hbar^2/(2mL^2)$. Подставляя сюда $\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, $L = 10^{-2}$ м, находим $E \approx 10^{-36}$ Дж.