**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
"Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"**

Факультет компьютерных наук
Департамент больших данных и информационного поиска

Программа дисциплины

Линейная алгебра и геометрия

(для основного потока)

для образовательной программы «Прикладная математика и информатика»
направления подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
уровень - бакалавр

Разработчик программы:
Р.С.Авдеев, кандидат физико-математических наук (suselr@yandex.ru, ravdeev@hse.ru)

Одобрена на заседании Департамента больших данных и информационного поиска
«___» _____________ 2017 г.

Руководитель департамента
_____________ В.В. Подольский

Утверждена Академическим советом образовательной программы
«___»____________ 2017 г., № протокола________________

Академический руководитель образовательной программы
Конушин А. С. ________________

Москва 2017

1 Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих дисциплину «Линейная алгебра и геометрия», учебных ассистентов и студентов направления подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», обучающихся по образовательной программе «Прикладная математика и информатика»

Программа учебной дисциплины разработана в соответствии с:

- Образовательным стандартом ФГАОУ ВО НИУ ВШЭ по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика https://www.hse.ru/data/2017/09/04/1321436546/2.03.02%20%D0%9F%D1%80%D0%B8%D0%BA%D0%BB%D0%B0%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F%20%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0%20%D0%B8%20%D0%B8%D0%BD%D1%84%D0%BE%D1%80%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0.pdf ;
- Образовательной программой «Прикладная математика и информатика», направление подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
- Объединенным учебным планом университета по образовательной программе «Прикладная математика и информатика», утверждённым в 2017 г.

2 Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Линейная алгебра и геометрия» являются:

1) ознакомление студентов с основами линейной алгебры, аналитической геометрии и общей алгебры;
2) формирование у студентов навыков использования методов линейной алгебры для формализации и решения прикладных задач, в том числе экономических, геометрических и особенно возникающих в задачах анализа данных и в компьютерных науках.

3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен:

- Знать основные теоремы линейной алгебры и иметь чёткое представление об основных алгебраических структурах, используемых в задачах линейной алгебры;
- Уметь решать задачи линейной алгебры и аналитической геометрии, перечисленные в программе курса, иметь представление об алгоритмической сложности таких задач;
- Иметь навыки решения систем линейных уравнений, вычисления определителей, исследования квадратичных форм, нахождения собственных векторов, приведения линейного оператора к жордановой форме, определения типов и свойств кривых и поверхностей первого и второго порядка.

Выпускник по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» с квалификацией (степенью) бакалавр должен обладать следующими компетенциями.

Компетенция	*Код по ФГОС / НИУ*	*Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)*	*Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции*
Способен учиться, приобретать новые знания, умения, в том числе в области, отличной от	*УК-1*	*СД, МЦ*	Способность к анализу и синтезу на основе системного подхода, готовность к поиску необ-

Компетенция	***Код по ФГОС / НИУ***	***Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)***	***Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции***
профессиональной			ходимой информации.
Способен вести исследовательскую деятельность, включая анализ проблем, постановку целей и задач, выделение объекта и предмета исследования, выбор способа и методов исследования, а также оценку его качества	*УК-6*	*РБ*	Способность перейти от проблемной ситуации к проблемам, задачам и лежащим в их основе противоречиям (на примере решения сложных задач из области линейной алгебры)
Способен описывать проблемы и ситуации профессиональной деятельности, используя язык и аппарат математики	*ПК-1*	*РБ, СД*	Способность понимать и узнавать линейные модели явлений и использовать их при анализе практики
Способен математически корректно формулировать и доказывать утверждения, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата	*ПК-2*	*РБ, СД*	Способность корректно воспроизвести доказательства теорем и решать задачи на доказательство
Способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	*ПК-3*	*РБ*	Способность к абстрактным алгебраическим рассуждениям
Способен вести письменную и устную коммуникацию на русском (государственном) языке в рамках профессионального и научного общения, как межличностного, так и группового	*ПК-10*	*СД*	Способность ясно, логически безупречно, с учетом современных норм и требований международных стандартов математической коммуникации изложить решение задачи

Виды и задачи профессиональной деятельности

Научно-исследовательские	
Исследование и разработка математических моделей и методов, алгоритмов и программного обеспечения по тематике проводимых научно-исследовательских проектов;	НИД-3
Проектные и производственно-технологические	
Разработка математических методов для анализа и построения моделей по тематике выполняемых научно-исследовательских прикладных задач или опытно-конструкторских работ	ПД-1

4 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина относится профессиональному циклу, базовой части.

Для освоения учебной дисциплины не требуются знания и компетенции, выходящие за пределы требований к поступающим на программу бакалавриата.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

- Математический анализ;
- Дискретная математика 2
- Дифференциальные уравнения;
- Теория вероятностей и математическая статистика;
- Анализ данных;
- Машинное обучение
  и других.

5 Тематический план учебной дисциплины

Курс «Линейная алгебра и геометрия» относится к числу базовых и рассчитан на преподавание в течение всего первого курса (144 аудиторных часа).

№	Название темы	Всего часов	В т.ч. лекции	В т.ч. семинары	Самост. работа
1	Системы линейных уравнений	**32**	**6**	**6**	**20**
2	Матрицы	**31**	**6**	**6**	**19**
3	Перестановки и подстановки	**21**	**4**	**4**	**13**
4	Определители	**32**	**6**	**6**	**20**
5	Комплексные числа	**21**	**4**	**4**	**13**
6	Векторные пространства	**63**	**12**	**12**	**39**
7	Билинейные и квадратичные формы	**32**	**6**	**6**	**20**
8	Евклидовы пространства	**32**	**6**	**6**	**20**
9	Аналитическая геометрия	**42**	**8**	**8**	**26**
10	Линейные операторы	**74**	**14**	**14**	**46**
Итого		**380**	**72**	**72**	**236**

6 Формы контроля знаний студентов

Тип контроля	Форма контроля	1 год				Кафедра	Параметры
		1	2	3	4		
Текущий (неделя)	Контрольная работа	1		1			Письменная работа на 90 минут
	Домашнее задание		1		1		Не менее 5--10 задач на каждое задание
	Коллоквиум		1		1		
Промежуточный	Экзамен		1				Письменная работа на 160 минут.
Итоговый	Экзамен				1		Письменная работа на 160 минут.

Оценки по всем формам контроля выставляются по 10-балльной шкале.

7 Содержание дисциплины

1. Системы линейных уравнений.

Системы линейных уравнений. Совместные и несовместные системы линейных уравнений. Эквивалентные системы линейных уравнений. Расширенная матрица системы линейных уравнений. Элементарные преобразования системы линейных уравнений и соответствующие преобразования строк её расширенной матрицы. Сохранение множества решений системы линейных уравнений при элементарных преобразованиях.

Ступенчатые матрицы. Улучшенный ступенчатый вид матрицы. Приведение матрицы к ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк. Приведение ступенчатой матрицы к улучшенному ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Главные и свободные неизвестные. Общее решение системы линейных уравнений. Однородные системы линейных уравнений. Существование ненулевого решения у однородной системы линейных уравнений, у которой число неизвестных больше, чем число уравнений.

2. Матрицы.

Матрицы. Равенство матриц. Операции сложения и умножения на скаляр для матриц, свойства этих операций. Пространство R^n, его отождествление с матрицами-столбцами высоты n. Транспонирование матриц, его простейшие свойства. Умножение матриц, примеры. Матричная форма записи системы линейных уравнений.

Основные свойства умножения матриц. Некоммутативность умножения матриц. Диагонали квадратной матрицы. Диагональные матрицы. Умножение на диагональную матрицу. Единичная матрица. Матричные единицы. Умножение на матричную единицу. Реализация элементарных преобразований строк матрицы при помощи умножения слева на подходящую матрицу. След квадратной матрицы и его свойства.

3. Перестановки и подстановки.

Перестановки и подстановки. Инверсии. Знак и чётность подстановки. Произведение подстановок. Ассоциативность произведения подстановок. Тождественная подстановка. Обратная подстановка. Знак обратной подстановки. Транспозиции, элементарные транспозиции. Изменение знака подстановки при умножении справа на элементарную транспозицию. Изменение знака подстановки при умножении справа на произвольную транспозицию. Разложение подстановки в произведение транспозиций, а также в произведение элементарных транспозиций. Теорема о знаке произведения подстановок.

4. Определители.

Определитель квадратной матрицы. Определители порядков 2 и 3. Определитель транспонированной матрицы. Определитель матрицы со строкой (столбцом) нулей. Поведение определителя при умножении строки (столбца) на число и при разложении строки (столбца) в сумму двух строк (столбцов). Поведение определителя при перестановке двух строк (столбцов). Определитель матрицы, содержащей две одинаковых строки (два одинаковых столбца). Поведение определителя при прибавлении к строке (столбцу) другой, умноженной на число.

Верхнетреугольные и нижнетреугольные матрицы, их определители. Определитель с углом нулей. Определитель произведения матриц.

Дополнительные миноры и алгебраические дополнения к элементам квадратной матрицы. Разложение определителя по строке (столбцу). Лемма о фальшивом разложении определителя. Обратная матрица, её единственность. Невырожденные матрицы. Определитель обратной матрицы. Присоединённая матрица. Критерий обратимости квадратной матрицы, явная формула для обратной матрицы. Следствия из критерия обратимости. Матричные уравнения вида AX=B и XA=B, где A -- невырожденная квадратная матрица; единственность решения, нахождение решения при помощи элементарных преобразований. Вычисление обратной матрицы при помощи элементарных преобразований. Формулы Крамера.

5. Комплексные числа.

Понятие поля. Простейшие примеры. Построение поля комплексных чисел. Алгебраическая форма комплексного числа, его действительная и мнимая части. Комплексное сопряжение. Геометрическая модель комплексных чисел, интерпретация сложения и сопряжения в этой модели. Модуль комплексного числа, его свойства. Аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение, деление и возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра. Извлечение корней из комплексных чисел. Основная теорема алгебры комплексных чисел (без доказательства). Теорема Безу. Кратность корня многочлена. Теорема о том, что всякий многочлен степени n с комплексными коэффициентами имеет ровно n корней с учётом кратностей.

6. Векторные пространства.

Векторные пространства, подпространства. Линейная комбинация конечного набора векторов. Линейная оболочка подмножества векторного пространства. Конечномерные и бесконечномерные векторные пространства. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Базис векторного пространства, координаты вектора в базисе. Размерность конечномерного векторного пространства.

Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений. Ранг системы векторов. Связь ранга системы векторов с размерностью её линейной оболочки. Ранг матрицы: столбцовый и строковый, их равенство. Связь ранга квадратной матрицы с её определителем. Связь рангов матрицы и её подматрицы. Миноры. Теорема о ранге матрицы. Теорема Кронекера-Капелли.

Сумма двух подпространств векторного пространства. Связь размерностей двух подпространств с размерностями их суммы и пересечения. Сумма нескольких подпространств векторного пространства. Линейно независимые подпространства. Разложение векторного пространства в прямую сумму нескольких подпространств.

Описание всех базисов конечномерного векторного пространства в терминах одного базиса и матриц координат. Матрица перехода от одного базиса конечномерного векторного пространства к другому. Формула преобразования координат вектора при замене базиса.

Линейные отображения векторных пространств. Изоморфизм векторных пространств, изоморфные векторные пространства. Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств.

Матрица линейного отображения. Связь координат вектора и его образа при линейном отображении. Формула изменения матрицы линейного отображения между векторными пространствами V и W при замене их базисов.Пространство Hom(V,W). Матрица композиции двух линейных отображений.

Ядро и образ линейного отображения. Связь размерности образа линейного отображения с рангом его матрицы. Оценки на ранг произведения двух матриц. Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения. Приведение матрицы линейного отображения к диагональному виду с единицами и нулями на диагонали.

Линейные функции на векторном пространстве. Двойственное (сопряжённое) векторное пространство, его размерность в конечномерном случае. Двойственный базис. Утверждение о том, что всякое подпространство в F^n является множеством решений некоторой однородной системы линейных уравнений.

7. **Билинейные и квадратичные формы.**

Билинейные формы на векторном пространстве. Матрица билинейной формы. Формула изменения матрицы билинейной формы при переходе к другому базису. Ранг билинейной формы.

Симметричные билинейные формы. Критерий симметричности билинейной формы в терминах её матрицы. Квадратичные формы. Соответствие между симметричными билинейными формами и квадратичными формами. Симметризация билинейной формы и поляризация квадратичной формы. Канонический вид квадратичной формы. Теорема о приведении квадратичной формы к каноническому виду. Метод Лагранжа.

Угловые миноры матрицы квадратичной формы. Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду. Нормальный вид квадратичной формы над полем R. Приведение квадратичной формы над R к нормальному виду. Положительный и отрицательный индексы инерции квадратичной формы над R. Закон инерции. Положительно определённые, отрицательно определённые, неотрицательно определённые, неположительно определённые, неопределённые квадратичные формы над R. Следствие метода Якоби: вычисление отрицательного индекса инерции квадратичной формы над R. Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы. Критерий отрицательной определённости квадратичной формы.

8. Евклидовы пространства.

Евклидово пространство. Скалярное произведение. Длина вектора евклидова пространства. Неравенство Коши-Буняковского. Угол между векторами евклидова пространства. Матрица Грама системы векторов евклидова пространства. Определитель матрицы Грама: неотрицательность, критерий положительности.

Ортогональное дополнение подмножества евклидова пространства. Разложение евклидова пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения. Ортогональная проекция вектора на подпространство, ортогональная составляющая вектора относительно подпространства. Явная формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в R^n, заданное своим базисом.

Ортогональные и ортонормированные системы векторов евклидова пространства, ортогональные и ортонормированные базисы. Теорема о существовании ортонормированного базиса. Описание всех ортонормированных базисов в терминах одного ортонормированного базиса и матриц перехода. Ортогональные матрицы и их свойства. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в терминах его ортогонального базиса. Метод ортогонализации Грама-Шмидта.

Теорема Пифагора в евклидовом пространстве. Расстояние между векторами евклидова пространства. Неравенство треугольника. Теорема о расстоянии от вектора до подпространства. Метод наименьших квадратов для несовместных систем линейных уравнений: постановка задачи и её решение. Единственность псевдорешения и явная формула для него в случае линейной независимости столбцов матрицы коэффициентов. Формула для расстояния от вектора до подпространства в терминах матриц Грама.

k-мерный параллелепипед. Объём k-мерного параллелепипеда в евклидовом пространстве. Вычисление объёма k-мерного параллелепипеда при помощи определителя матрицы Грама задающих его векторов. Формула для объёма n-мерного параллелепипеда в n-мерном евклидовом пространстве в терминах координат задающих его векторов в ортонормированном базисе.

Ориентация в евклидовом пространстве. Ориентированный объём n-мерного параллелепипеда в n-мерном евклидовом пространстве.

9. **Элементы аналитической геометрии**.

Трёхмерное евклидово пространство. Смешанное произведение векторов, его выражение в координатах, критерий компланарности трёх векторов. Векторное произведение, критерий коллинеарности двух векторов. Связь векторного произведения со смешанным произведением. Антикоммутативность и билинейность векторного произведения. Двойное векторное произведение, тождество Якоби. Выражение векторного произведения в координатах.

Связь множества решений системы линейных уравнений с множеством решений соответствующей однородной системы. Линейные многообразия в R^n. Критерий равенства двух линейных многообразий. Направляющее подпространство и размерность линейного многообразия. Понятия репера и аффинной системы координат на линейном многообразии. Теорема о плоскости, проходящей через любые k+1 точек в R^n, следствия для двух и трёх точек.

Случаи взаимного расположения двух линейных многообразий: совпадают, одно содержится в другом, параллельны, скрещиваются. Прямые в R^2: различные способы задания, уравнение прямой, проходящей через две различные точки. Плоскости в R^3: различные способы задания, уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой. Прямые в R^3: различные способы задания, уравнение прямой, проходящей через две различные точки. Взаимное расположение двух плоскостей, двух прямых, прямой и плоскости, трёх плоскостей в R^3. Расстояние от точки до прямой, от точки до плоскости, между двумя скрещивающимися прямыми в R^3. Угол между двумя прямыми, между прямой и плоскостью, между двумя плоскостями.

Метрическая классификация кривых 2-го порядка и поверхностей 2-го порядка.

10. **Линейные операторы**.

Линейные операторы (линейные преобразования). Матрица линейного оператора. Формула изменения матрицы линейного оператора при замене базиса. Инвариантность определителя и следа матрицы линейного оператора относительно замены базиса. Подобные матрицы, отношение подобия на множестве квадратных матриц фиксированного порядка. Критерий обратимости линейного оператора в терминах его ядра, образа и определителя.

Подпространства, инвариантные относительно линейного оператора. Ограничение линейного оператора на инвариантное подпространство. Вид матрицы линейного оператора в базисе, часть которого порождает инвариантное подпространство.

Собственные векторы, собственные значения и спектр линейного оператора. Диагонализуемые линейные операторы. Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах существования базиса из собственных векторов. Собственное подпространство, отвечающее фиксированному собственному значению линейного оператора. Характеристический многочлен линейного оператора. Связь спектра линейного оператора с его характеристическим многочленом. Существование собственного вектора для линейного оператора в комплексном векторном пространстве.

Алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения линейного оператора, связь между ними. Линейная независимость собственных подпространств линейного оператора, отвечающих попарно различным собственным значениям. Диагонализуемость линейного оператора, у которого число корней характеристического многочлена равно размерности пространства. Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах его характеристического многочлена, а также алгебраической и геометрической кратностей его собственных значений. Существование одномерного или двумерного инвариантного подпространства у линейного оператора в действительном векторном пространстве.

Билинейные функции, связанные с линейным оператором в евклидовом пространстве. Сопряжённый оператор, его существование и единственность. Самосопряжённые (симметрические) операторы. Инвариантность ортогонального дополнения к подпространству, инвариантному относительно самосопряжённого оператора. Существование собственного вектора у самосопряжённого оператора. Теорема о существовании у самосопряжённого оператора ортонормированного базиса из собственных векторов. Приведение квадратичной формы в евклидовом пространстве к главным осям.

Ортогональные линейные операторы. Описание ортогональных операторов в одномерном и двумерном евклидовых пространствах. Инвариантность ортогонального дополнения к подпространству, инвариантному относительно ортогонального оператора. Теорема о каноническом виде ортогонального оператора. Классификация ортогональных операторов в трёхмерном евклидовом пространстве.

Теорема о сингулярных базисах для линейного отображения евклидовых пространств. Сингулярное разложение матрицы и её сингулярные значения. Алгоритм нахождения сингулярного разложения матрицы. Усечённое сингулярное разложение матрицы. Представление матрицы в виде суммы компонент ранга 1, связанное с её сингулярным разложением. Фробениусова норма матрицы. Теорема о низкоранговом приближении (без доказательства).

Корневые подпространства линейного оператора. Жорданова нормальная форма и жорданов базис линейного оператора.

8 Образовательные технологии

Проводятся стандартные лекционно-семинарские занятия и регулярные консультации с ответами на вопросы студентов. Применяются индивидуальные домашние задания и лабораторные работы, на коллоквиумах проводятся устные опросы и задаются теоретические задачи.

9 Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

9.1 Критерии оценки знаний, навыков

При текущем контроле студент должен продемонстрировать знание и понимание пройденного материала, владение навыками решения типовых задач, умение применять известные из лекций схемы теоретических рассуждений.

Это же должен продемонстрировать студент и на итоговом контроле.

9.2 Вопросы для оценки качества освоения дисциплины

Примеры задач для контрольных работ (рассортированы по темам, номера с пометкой «П» даны по задачнику Проскурякова, номера с пометкой «К» — по задачнику Кострикина, номера с пометкой «КК» - по задачнику Ким-Крицкова):

Решение систем линейных уравнений: П 82–89, 567–581, 689–704, 712–720; К 8.1, 8.2

Действия с матрицами: П 788–798, 801–805, 822–825, 836–845, 861–870, 937; К 17.1–17.5, 17.7, 18.3, 18.8, 18.9, 18.11

Подстановки: П 123–128, 151–161, 176–178; К 3.1–3.4, 3.6, 3.7

Определители произвольного порядка: определение: П 188–206, К 10.1–10.4

Свойства определителей произвольного порядка: П 212–215, 224–232 ; К 11.1–11.4, 11.6–11.7

Вычисление определителей произвольного порядка: П 238–240, 257–269, 279, 316; К 14.1

Сумма и пересечение двух подпространств векторного пространства: П 1317, 1318, 1320--1322; К 35.14, 35.15

Линейные отображения и их матрицы: П 1434--1438, 1441--1444, 1445, 1446, 1449, 1450; К 39.15, 39.16

Нахождение базиса ядра и базиса образа линейного отображения: К 39.5

Билинейные функции, квадратичные формы и их матрицы: К 37.6, 37.8, 37.10

Приведение квадратичной формы к каноническому и нормальному виду: П 1175--1186; К 38.18(а--г)

Исследование квадратичных форм на положительную определённость: П 1212--1216; К 38.11(а--г)

Метод ортогонализации Грама-Шмидта: П 1357--1363; К 43.7(а--г), 43.15(а--в)

Ортогональная проекция вектора на подпространство: П 1370--1372; К 43.19(а--в)

Расстояние от точки до линейного многообразия: П 1374; К 43.21(а--г), 51.7

Уравнения прямых и плоскостей в трёхмерном пространстве: КК 26.28--26.37, 26.39--26.47, 26.50, 27.34, 27.39--27.42, 31.1--31.3, 31.5--31.8, 31.21--31.25, 31.27--31.32

Взаимное расположение прямых и/или плоскостей в трёхмерном пространстве: КК 27.29, 27.32, 27.38, 31.13--31.15, 31.18, 31.19

Метрические задачи в трёхмерном пространстве: КК 32.28--32.31, 32.34, 32.35, 32.37, 32.38--32.40

Изменение матрицы линейного оператора при переходе к другому базису: П 1452--1454; К 39.19--39.21

Собственные векторы и собственные значения линейных операторов: П 1465--1474; К 40.15

Диагонализуемость линейных операторов: П 1479--1483; К 40.16

Примеры теоретических вопросов для коллоквиума.

1) Что такое поле? Докажите, что в поле элемент, обратный к любому ненулевому элементу, определён однозначно.
2) Что такое комплексные числа? Дайте определение арифметических операций над комплексными числами.
3) Что такое модуль и аргумент комплексного числа? Как модуль и аргумент ведут себя при перемножении комплексных чисел?
4) Что такое кратность корня многочлена? Докажите, что сумма кратностей корней многочлена с комплексными коэффициентами равна его степени.
5) Что такое векторное пространство над произвольным полем?
6) Что такое сумма подпространств произвольного векторного пространства?
7) Что такое матрица перехода от одного базиса векторного пространства к другому?
8) Что такое линейное отображение и линейный оператор?
9) Что такое матрица линейного отображения? Как построить эту матрицу, зная образы базисных векторов при данном линейном отображении?
10) Что такое ядро, образ и ранг линейного отображения? Докажите, что ядро и образ являются векторными пространствами.
11) Что такое изоморфизм векторных пространств? Докажите, что отображение, обратное к изоморфизму, также является изоморфизмом.
12) Что такое инвариантное подпространство линейного оператора?
13) Что такое собственные векторы и собственные значения линейного оператора? Что такое характеристический многочлен и как он связан с собственными значениями?
14) Докажите, что у всякого линейного оператора в n-мерном комплексном векторном пространстве есть собственный вектор, а у всякого линейного оператора в n-мерном действительном векторном пространстве есть одномерное или двумерное инвариантное подпространство.
15) Докажите, что матрица линейного оператора имеет диагональный вид тогда и только тогда, когда все векторы базиса являются собственными для данного оператора.
16) Дайте определение линейного функционала (линейной формы) и двойственного (сопряжённого) пространства.

17) Что такое билинейная форма? Что такое матрица билинейной формы?
18) Что такое квадратичная форма? Что такое матрица квадратичной формы?
19) Что такое индексы инерции квадратичной формы на конечномерном действительном векторном пространстве?
20) Сформулируйте и докажите критерий Сильвестра положительно (отрицательной) определённости квадратичной формы на конечномерном действительном векторном пространстве.
21) Дайте определение евклидова векторного пространства.
22) Что такое ортогональный базис и ортонормированный базис? Докажите, что во всяком конечномерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.
23) Что такое матрица Грама системы векторов в евклидовом пространстве?
24) Что такое ортогональное дополнение подпространства в евклидовом пространстве? Докажите, что оно является подпространством.
25) Что такое ортогональная проекция вектора на подпространство в евклидовом пространстве?
26) Что такое (неориентированный) объём параллелепипеда в евклидовом пространстве? Как он связан с матрицей Грама данной системы векторов?
27) Что такое ориентированный объём параллелепипеда? Какова связь объёма и ориентированного объёма параллелепипеда в евклидовом пространстве?
28) Что такое самосопряжённый оператор в евклидовом пространстве? Какими свойствами характеризуется матрица самосопряжённого оператора в ортонормированном базисе?
29) Что такое ортогональный оператор в евклидовом пространстве? Какими свойствами характеризуется матрица ортогонального оператора в ортонормированном базисе?

Примеры задач для экзамена:

I: см. примеры задач для контрольных работ

II: приводимые ниже задачи (рассортированы по темам, номера с пометкой "П" даны по задачнику Проскурякова, номера с пометкой "К" — по задачнику Кострикина, номера с пометкой "КК" — по задачнику Ким–Крицкова)

Сумма и пересечение двух подпространств векторного пространства: П 1317, 1318, 1320--1322; К 35.14, 35.15

Линейные отображения и их матрицы: П 1434--1438, 1441--1444, 1445, 1446, 1449, 1450; К 39.15, 39.16

Нахождение базиса ядра и базиса образа линейного отображения: К 39.5; задача 2(б) из ИДЗ-4

Билинейные функции, квадратичные формы и их матрицы: К 37.6, 37.8, 37.10

Приведение квадратичной формы к каноническому и нормальному виду: П 1175--1186; К 38.18(а--г)

Исследование квадратичных форм на положительную определённость: П 1212--1216; К 38.11(а--г)

Метод ортогонализации Грама-Шмидта: П 1357--1363; К 43.7(а--г), 43.15(а--в)

Ортогональная проекция вектора на подпространство: П 1370--1372; К 43.19(а--в)

Расстояние от точки до линейного многообразия: П 1374; К 43.21(а--г), 51.7

Уравнения прямых и плоскостей в трёхмерном пространстве: КК 26.28--26.37, 26.39--26.47, 26.50, 27.34, 27.39--27.42, 31.1--31.3, 31.5--31.8, 31.21--31.25, 31.27--31.32

Взаимное расположение прямых и/или плоскостей в трёхмерном пространстве: КК 27.29, 27.32, 27.38, 31.13--31.15, 31.18, 31.19

Метрические задачи в трёхмерном пространстве: КК 32.28--32.31, 32.34, 32.35, 32.37, 32.38--32.40

Изменение матрицы линейного оператора при переходе к другому базису: П 1452--1454; К 39.19--39.21

Собственные векторы и собственные значения линейных операторов: П 1465--1474; К 40.15

Диагонализуемость линейных операторов: П 1479--1483; К 40.16

10 Порядок формирования оценок по дисциплине

Все оценки выставляются по 10-балльной шкале.

Текущий контроль знаний осуществляется в следующих формах:

- коллоквиум (по одному в конце 2-го модуля и в 4-м модуле)
- письменная контрольная работа (по одной в середине 2-го и 4-го модуля);
- выполнение индивидуальных домашних заданий и лабораторных работ (на протяжении всего курса);
- устная сдача задач из листков, выдаваемых с целью лучшего усвоения и закрепления теоретического материала (на протяжении всего курса).

Итоговый контроль осуществляется в форме письменной работы во 2-м и 4-м модуле; результат отражается в оценке $О_{экз}$.

Накопленная оценка за текущий контроль формируется из следующих компонент:

- оценка за коллоквиум $О_{колл}$;
- оценка за контрольную работу $О_{к/р}$;
- оценка за большие домашние задания (индивидуальные домашние задания и лабораторные работы) $О_{д/з}$;
- оценка за сдачу листков $О_{л}$;
- оценка за работу на семинарах $О_{сем}$.

Формула для итоговой оценки во 2-м модуле:

$$О_{итог} = 0{,}75^* О_{накопл} + 0{,}25^* О_{экз},$$

где $О_{накопл}$ рассчитывается по следующей формуле:

$$О_{накопл} = 0{,}3^* О_{колл} + 0{,}25^*О_{к/р} + 0{,}25^*О_{д/з} + 0{,}1^*О_{л} +0{,}1^*О_{сем}.$$

Округление производится только для итоговой оценки. Способ округления -- арифметический.

Формула для итоговой оценки в 4-м модуле:

$$О_{итог} = 0{,}75^* О_{накопл} + 0{,}25^* О_{экз},$$

где $О_{накопл}$ рассчитывается по следующей формуле:

$$О_{накопл} = 0{,}3^* О_{колл} + 0{,}25^*О_{к/р} + 0{,}25^*О_{д/з} + 0{,}1^*О_{л} +0{,}1^*О_{сем}.$$

Округление производится только для итоговой оценки. Способ округления -- арифметический.

В диплом выставляется итоговая оценка, полученная в 4-м модуле.

11 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

11.1 Базовые учебники

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Основы алгебры. М.: Физматлит, 1994.
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра. М.: Физматлит, 2000.
3. Винберг Э. Б. Курс алгебры. М.: Факториал, 1999 (или любое последующее издание).
4. Михалёв А.А., Михалёв А.В. Начала алгебры. Часть I. М.: Интернет-университет информационных технологий, 2005

11.2 Основная литература

5. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре (любое издание, например М.: БИНОМ, 2005).
6. Сборник задач по алгебре под редакцией А.Н. Кострикина. Новое издание. М.: МЦНМО, 2009.
7. Ким Г. Д. , Крицков Л. В., Алгебра и аналитическая геометрия. Теоремы и задачи. Том I, М.: Планета знаний, 2007.
8. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре (любое издание, кроме 1-го, например М.: Добросвет, МЦНМО, 1998).
9. Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия, М.: Наука, 1986.
10. Шевцов Г.С. Линейная алгебра. Теория и прикладные аспекты. – М.: Финансы и статистика, 2003.

11.3 Дополнительная литература

11. Aleskerov F., Ersel H., Piontkovski D., *Linear Algebra for Economists*. Berlin—Heidelberg, Springer, 2011.
12. Бурмистрова Е. Б., Лобанов С. Г., *Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии*, М.: ГУ ВШЭ, 1998.
13. Городенцев А.Л., *Алгебра. Учебник для студентов-математиков. Часть I*. М.: МЦНМО, 2013.

11.4 Справочники, словари, энциклопедии

не используются

11.5 Программные средства

- Выбор программных средств для реализации алгоритмов осуществляется студентом.

В домашних заданиях для рутинных алгебраических вычислений возможно использование систем Maple или Matlab, а также в некоторых случаях интернет-сервиса Wolfram Alpha.

11.6 Дистанционная поддержка дисциплины

Предусмотрена электронная переписка со студентами.

12 Материально-техническое обеспечение дисциплины

Не предусмотрено.