**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
"Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"**

Факультет экономических наук
Департамент математики

Рабочая программа дисциплины

Линейная алгебра и геометрия

(для пилотного потока)

для образовательной программы «Прикладная математика и информатика»
направления подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
уровень -бакалавр

Разработчик программы
Д.И.Пионтковский, доктор физико-математических наук, dpiontkovski@hse.ru

Одобрена на заседании департамента математики факультета экономических наук
«_________»_______2017 г.

Руководитель департамента
Ф.Т.Алескеров _________________

Утверждена Академическим советом образовательной программы
«_____»___2017 г., № протокола______

Академический руководитель образовательной программы
А.С. Конушин _________________

Москва, 2017

1. Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих дисциплину «Линейная алгебра и геометрия», учебных ассистентов и студентов направления подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», обучающихся по образовательной программе «Прикладная математика и информатика»

Программа учебной дисциплины разработана в соответствии с:

- Образовательным стандартом ФГАОУ ВО НИУ ВШЭ по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика https://www.hse.ru/data/2017/09/04/1321436546/2.03.02%20%D0%9F%D1%80%D0%B8%D0%BA%D0%BB%D0%B0%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F%20%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0%20%D0%B8%20%D0%B8%D0%BD%D1%84%D0%BE%D1%80%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0.pdf ;
- Образовательной программой «Прикладная математика и информатика», направление подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
- Объединенным учебным планом университета по образовательной программе «Прикладная математика и информатика», утверждённым в 2017 г.

2. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Линейная алгебра и геометрия» являются:

1. ознакомление студентов с основами линейной алгебры, аналитической геометрии и общей алгебры;
2. формирование у студентов навыков использования методов линейной алгебры для формализации и решения прикладных задач, в том числе экономических и геометрических, и, особенно, возникающих в задачах анализа данных и в компьютерных науках.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен:

- Знать основные теоремы линейной алгебры и иметь четкое представление об основных алгебраических структурах, используемых в задачах линейной алгебры;
- Уметь решать задачи линейной алгебры и аналитической геометрии, перечисленные в программе курса, иметь представление об алгоритмической сложности таких задач;
- Иметь навыки решения систем линейных уравнений, вычисления определителей, исследования квадратичных форм, нахождения собственных векторов, приведения оператора к жордановой форме, определения типов и свойств кривых и поверхностей первого и второго порядка.

Выпускник по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» с квалификацией (степенью) бакалавр в соответствии с целями основной образовательной программы и задачами профессиональной деятельности должен обладать следующими компетенциями:

Компетенция	*Код по ФГОС / НИУ*	*Уровень формирования компетенции*	*Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)*	*Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции*
Способен учиться, приобретать новые знания, умения, в том числе в области, отличной от профессиональной	*УК-1*	*СД, МЦ*	Способность к анализу и синтезу на основе системного подхода, готовность к поиску необходимой информации.	

Способен вести исследовательскую деятельность, включая анализ проблем, постановку целей и задач, выделение объекта и предмета исследования, выбор способа и методов исследования, а также оценку его качества	*УК-6*	*РБ*	Способность перейти от проблемной ситуации к проблемам, задачам и лежащим в их основе противоречиям (на примере решения сложных задач из области линейной алгебры)	Стандартные (лекционно-семинарские)
Способен описывать проблемы и ситуации профессиональной деятельности, используя язык и аппарат математики	*ПК-1*	*РБ, СД*	Способность понимать и узнавать линейные модели явлений и использовать их при анализе практики	Стандартные (лекционно-семинарские)
Способен математически корректно формулировать и доказывать утверждения, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата	*ПК-2*	*РБ, СД*	Способность корректно воспроизвести доказательства теорем и решать задачи на доказательство	Стандартные (лекционно-семинарские)
Способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	*ПК-3*	*РБ*	Способность к абстрактным алгебраическим рассуждениям	Стандартные (лекционно-семинарские)
Способен вести письменную и устную коммуникацию на русском (государственном) языке в рамках профессионального и научного общения, как межличностного, так и группового	*ПК-10*	*СД*	Способность ясно, логически безупречно, с учетом современных норм и требований международных стандартов математической коммуникации изложить решение задачи	Стандартные (лекционно-семинарские)

Виды и задачи профессиональной деятельности

Научно-исследовательские	
Исследование и разработка математических моделей и методов, алгоритмов и программного обеспечения по тематике проводимых научно-исследовательских проектов;	НИД-3
Проектные и производственно-технологические	
Разработка математических методов для анализа и построения моделей по тематике выполняемых научно-исследовательских прикладных задач или опытно-конструкторских работ	ПД-1

4. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина относится к профессиональному циклу, блоку «Базовая часть» (Б.Пр.Б).

Для освоения учебной дисциплины не требуются знания и компетенции, выходящие за пределы требованиям к поступающим на программу бакалавриата.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

— Математический анализ;

- Дифференциальные уравнения;
- Теория вероятностей и математическая статистика;
- Анализ данных;
- Машинное обучение,

И других

5. Тематический план учебной дисциплины

Курс «Линейная алгебра и геометрия» относится к числу базовых и рассчитан на преподавание в течение всего первого курса (144 аудиторных часа).

№	Название темы	Всего часов	В т.ч. лекции	В т.ч. семинары	Самост. работа
1	Векторы и матрицы	32	6	6	20
2	Определитель	36	8	8	20
3	Решение систем линейных уравнений	46	8	8	30
4	Линейные пространства	64	12	12	40
5	Комплексные числа	18	4	4	10
6	Квадратичные формы и скалярные произведения	64	12	12	40
7	Собственные векторы	78	14	14	50
8	Аналитическая геометрия	42	8	8	26
Итого		**380**	**72**	**72**	**236**

6. Содержание дисциплины

Звездочками отмечены вопросы, которые изучаются учащимися самостоятельно с помощью учебных ассистентов в процессе решения задач («система листков»). Также с помощью такой системы предусмотрено углубленное изучение основных тем, специально здесь не отмеченное.

1. Векторы и матрицы

Векторы как упорядоченные наборы чисел. Линейные операции. Скалярное произведение, неравенство Коши, неравенство треугольника, угол между векторами.

Линейные многообразия, прямые. Прямые и плоскости в трехмерном пространстве, способы задания, углы между ними.

Матрицы и линейные операции над ними. Различные алгоритмические реализации умножения матриц. Простейшие матричные уравнения, система линейных уравнений в матричной форме. Невырожденные (обратимые слева) матрицы.

*Другие определения произведения матриц.

*Простейшая линейная производственная модель.

Литература: основной учебник: [Курош], гл. 2, 3; дополнительная литература: 2,3,5,6,8 (здесь и далее ссылки даны на список литературы ниже в разделе 9)

2. Определитель

Маломерные определители. . Расстояния, площади многоугольников и объемы тетраэдров и параллелепипедов в двумерном и трехмерном арифметическом пространстве.

Перестановки. Знак перестановки, разложение перестановки в произведение транспозиций.

Понятие группы. Примеры.

*Примеры и некоторые свойства групп подстановок. Группы симметрий. Подгруппы, порядок элемента группы. Теорема Кэли.

Определитель квадратной матрицы.

Свойства определителя. Способы вычисления определителей. Определитель произведения матриц.

*Аксиоматическое определения определителя.

*Классические определители.

Литература: основной учебник: [Курош], гл. 1; дополнительная литература: 2,3,5,6,8.

3. Решение систем линейных уравнений.

Решение системы линейных уравнений с невырожденной матрицей. Формулы Крамера. Формула обратной матрицы.

Элементарные преобразования. Общая схема редукции. Метод Гаусса.

Ранг матрицы: различные определения. Миноры и вычисление ранга. Другие способы вычисления обратной матрицы.

Теорема Кронекера-Капелли, альтернатива Фредгольма. Общий вид решений системы линейных уравнений.

Литература: основной учебник: [Курош], гл. 1; дополнительная литература: 2,3,5,6,8.

4. Линейные пространства.

Определение и примеры линейных пространств. Подпространство. Линейная независимость, базис, размерность. Замена координат. Размерности суммы и пересечения подпространств.

Линейные отображения и линейные операторы. Изоморфизм линейных пространств. Замена базисов. Ядро и образ линейного отображения.

* Свойства решетки подпространств линейного пространства.

*Факторпространства. Точные последовательности. Тензорное произведение линейных пространств.

Литература: основной учебник: [Курош], гл. 7; дополнительная литература: 2,3, 8, 10.

5. Комплексные числа.

Понятие поля. Примеры: некоторые числовые поля, поле из двух элементов.

Определение комплексного умножения на плоскости. Основные операции с комплексными числами. Модуль и аргумент, формулы Муавра, формула Эйлера. Решение простейших алгебраических уравнений. *Основная теорема алгебры.

Линейные пространства над полем.

Комплексное линейное пространство, комплексификация действительного пространства.

*Алгебры над полем. Кватернионы. Геометрический смысл кватернионов.

*Бесконечномерные алгебры. Симметрическая алгебра и алгебра Грассманна. Определитель как старшая внешняя степень оператора.

Литература: основной учебник: [Курош], гл. 4; дополнительная литература: 3,5,8, 10.

6. Евклидовы пространства.

Билинейные и квадратичные формы. Ортогональные базисы, процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Канонический вид и нормальный вид квадратичной формы, закон инерции. Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы. Метод Якоби. Критерий Сильвестра.

Евклидовы пространства. Матрица Грама. Неравенство треугольника, неравенство Ко- ши. Угол между векторами. Проекции, нормали, расстояния. Ортогональные и ортонормированные базисы, их построение. Объем параллелепипеда, его связь с ориентированным объемом и матрицей Грама.

Литература: основной учебник: [Курош], гл. 6,8; дополнительная литература: 2,4,5,6.

7. Собственные векторы.

Инвариантные подпространства и собственные вектора линейного оператора. Собственные значения и характеристический многочлен. Теорема о минимальной размерности инвариантных подпространств. Диагонализуемый оператор.

*Модель межотраслевого баланса.

Корневые подпространства. Жорданова форма и жорданов базис. Алгоритм построения жорданова базиса. Матричные многочлены, теорема Гамильтона-Кэли, минимальный многочлен и его связь с характеристическим многочленом.

*Фробениусова форма матрицы.

Линейные операторы в пространстве со скалярным произведением. Самосопряженные (симметрические) операторы и ортонормированные собственные базисы. Унитарные и ортогональные операторы.

Литература: основной учебник: [Курош], гл. 7, 13; дополнительная литература: 2,4,5,6,

8. Основы аналитической геометрии

Векторное и смешанное произведение векторов, их применение. * Смешанное произве дение и форма объема в многомерном пространстве.

Движения аффинного пространства, теорема о разложении движения в композицию ортогонального оператора и параллельного переноса. Общие квадрики в n-мерном арифметическом пространстве, теорема о приведении их движением к каноническому виду. Кривые второго порядка, их классификация. Свойства конических сечений. Классификация поверхностей второго порядка.

* Основы проективной геометрии: проективные пространства, проективизация, понятие о проективном алгебраическом многообразии, изоморфизм групп GL(V) и H(V) /PGL(V), задание проективного отображения его значениями на точках общего положения.

Литература: основной учебник: [3, параграфы 7.4 и 7.5]; дополнительная литература: 6,7; 3,8, 10

7. Формы контроля знаний студентов

Тип контроля	Форма контроля	1 год				Кафедра	Параметры
		1	2	3	4		
Текущий (неделя)	Контрольная работа	1		1	1	Департамент математики	Письменная работа 80 минут
	Домашнее задание		1		1	Департамент математики	Не менее 5--10 задач на каждое задание
	Коллоквиум		1		1	Департамент математики	
Промежуточный	Экзамен		1			Департамент математики	Выставляется по результатам контрольной, коллоквиума и домашнего задания, а также решения задач из листков.
Итоговый	Экзамен				1	Департамент математики	Выставляется по результатам двух контрольных, коллоквиума и домашнего задания, а также решения задач из листков

7.1 Критерии оценки знаний, навыков

При текущем контроле студент должен продемонстрировать знание и понимание пройденного материала, владение навыками решения типовых задач, умение применять известные из лекций схемы теоретических рассуждений, методами определения решения или качественного исследования соответствующего дифференциального уравнения.

Это же должен продемонстрировать студент и на итоговом контроле.

Оценки по всем формам текущего контроля выставляются по 10-ти балльной шкале.

8. Образовательные технологии

Проводятся стандартные лекционно-семинарские занятия и регулярные консультации с ответами на вопросы студентов. Применяются индивидуальные домашние задания, на коллоквиумах проводятся устные опросы и задаются теоретические задачи.

9. Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

9.1 Вопросы для оценки качества освоения дисциплины

Для оценки качества освоения дисциплины можно использовать около двух тысяч задач из “Сборника задач по линейной алгебре” И. В. Проскурякова, а также задачники [7,9]. Примеры задач итоговой контрольной работы:

1. Найдите углы $\triangle ABC$, где $A = (9,2,4), B = (2,3,1), C = (1,-2,1)$.

2. Найдите вектор x, перпендикулярный вектору $a = (2,-3,3)$ и образующий с вектором $b = (-1,0,0)$ угол $\pi/4$, если известно, что с осью OY он образует острый угол, а его длина равна длине вектора b.

3. Докажите или опровергните равенство:

a) $[a,[b,c]] = a\cdot(b,c) - c\cdot(a,b)$;

b) $[[a,b],[c,d]] = c\langle a,b,d\rangle - d\langle a,b,c\rangle$;

c) $\langle a,b,c\rangle d = \langle d,b,c\rangle a + \langle d,c,a\rangle b + \langle d,a,b\rangle c$.

4. (Задача Минковского о еже)

а) Из середины каждой стороны выпуклого многоугольника построили перпендикулярный ей вектор, равный ей по длине и направленный вовне многоугольника. Докажите, что сумма построенных векторов нулевая.

б)* На каждой грани выпуклого многогранника построили перпендикулярный ей вектор, направленный вовне многогранника, длина котрого равна площади этой грани. Докажите, что сумма построенных векторов нулевая.

5. Составьте уравнение плоскости, которая проходит через ребро AB параллельно ребру CD тетраэдра, где $A = (5,1,3), B = (1,6,2), C = (5,0,4)$ и $D = (4,0,6)$.

6. Установите, пересекаются ли и параллельны ли следующие две плоскости:

а) $x + y + z = 1$ и $2x + 2y - 2z = -3$;

б) $\begin{cases} x = 1 + u + v \\ y = 2 + u \\ z = 3 + u - v \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 1 + 4u \\ y = 3u + v \\ z = 4 + 2u + 2v. \end{cases}$

7. Две плоскости заданы параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x_1 + a_1u + a_2v \\ y = y_1 + b_1u + b_2v \\ z = z_1 + c_1u + c_2v \end{cases}$ и $\begin{cases} x = x_2 + a_3u + a_4v \\ y = y_2 + b_3u + b_4v \\ z = z_2 + c_3u + c_4v. \end{cases}$ Определите с помощью рангов

$$r = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix} \text{ и } R = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & x_2 - x_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & y_2 - y_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & z_2 - z_1 \end{pmatrix},$$

когда эти плоскости пересекаются, когда параллельны, а когда совпадают.

8. Относительно следующих двух пар прямых проверьте, пересекаются ли они или являются параллельными или скрещивающимися; для пересекающихся найдите точку пересечения, а для параллельных или скрещивающихся — расстояние между ними:

а) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 7 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = -2 + t. \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 2x + 3y + 6z - 6 = 0 \\ 3x + 4y + 7z = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ y + 4z = 0. \end{cases}$

9. Составьте уравнение прямой, лежащей в плоскости $y + 2z = 0$ и пересекающей прямые $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 4t \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 4 + 2t \\ z = 1. \end{cases}$

10. При каком условии на векторы n_1, n_2, n_3, n_4 и числа d_1, d_2, d_3, d_4 четыре плоскости $(X, n_i) = d_i$ $(i = 1,2,3,4)$ образуют тетраэдр?

11. Определите угол, образованный прямыми $\begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 4x + y - 6z - 2 = 0 \\ y - 3z + 2 = 0. \end{cases}$

12. Найдите тот угол между плоскостями $x + y + z = 1$ и $x - 2y - 3z = 2$, в котором лежит точка $A(1, 2, 3)$.

13. Найдите кратчайшее расстояние между диагональю куба с единичным ребром и не пересекающей ее диагональю грани.

14. Найдите объем тетраэдра с вершинами $A(0, 1, 2)$, $B(-2, -1, 0)$, $C(2, 2, 0)$ и $D(0, 2, 5)$.

15. Вычислите объем выпуклой оболочки пяти точек $OABCD$, если эти точки суть $O(0, 0, 0)$, $A(-1, 1, 1), B(-1, 2, 3), C(0, 1, 4)$ и $D(0, -1, 0)$.

16. Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ задана функция f, которая в координатах (x, y), соответствующим некоторому базису $\mathbf{e}$ на плоскости, вычисляется по формуле

$$f(\bar{v}) = a + b_1 x + b_2 y + a_{11} x^2 + a_{12} xy + a_{22} y^2,$$

где $\bar{v}_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Выведите формулы для вычисления $f(\bar{v})$ в координатах, соответствующим некоторому другому базису $\mathbf{g}$, если дана матрица перехода $T = T_{\mathbf{e} \to \mathbf{g}}$.

17. Запишите матрицу билинейной формы $\phi(\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{x}, 2\overline{y}) - 4x_1 y_2$, где $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ и $\overline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ — векторы из пространства $\mathbb{R}^2$, в базисе, состоящем из векторов $\overline{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ и $\overline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Постройте соответствующую квадратичную форму и запишите ее матрицу в том же базисе $\overline{u}$ и $\overline{v}$.

18. При каких a, b и c квадратичная форма $q(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 2x_1 x_2 + bx_2^2 + cx_3^2$ является положительно или отрицательно определенной?

19. Найти канонический вид и каноническую систему координат для поверхности

$$17x^2 + 14y^2 + 14z^2 - 4xy - 4xz - 8yz - 8z + 12 = 0.$$

Определите ее тип.

20. Найдите канонический вид следующих квадрик:

a) $x^2 - 2xy - 2xz - 2yz + 4 = 0$;

b) $x_1 x_2 + x_2 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n = 1$.

Примеры теоретических вопросов, которые предлагались на коллоквиуме, приведены ниже.

Что такое (неориентированный) объем параллелепипеда в евклидовом пространстве? Какова его связь с площадью и объемом в обычной геометрии? Как он связан с определителем Грама системы векторов, составляющих ребра параллелепипеда, исходящих из одной вершины?

Как выразить через определители Грама расстояние от вектора в $\mathbb{C}^n$ до линейного пространства, порожденного данным линейно независимым набором векторов?

Что такое линейное отображение и линейный оператор? Докажите, что следующие отображения являются линейными: поворот плоскости $\mathbb{R}^2$ на угол α относительно начала координат; дифференцирование многочленов; умножение данной матрицы A на векторы из пространства $\mathbb{R}^n$.

Что такое матрица линейного отображения? Как вычислить матрицу композиции отображений? Как связаны матрицы линейного оператора $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ в старом и новом базисах и матрицы перехода?

Что такое ядро линейного отображения? Как связано пространство, порожденное строками матрицы произвольного линейного отображения $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, с его ядром? Как, зная ранг матрицы и ее размеры, найти размерность ядра этого отображения?

Что такое образ линейного отображения? Как связано пространство, порожденные столбцами матрицы произвольного линейного отображения $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, с его образом? Как, зная ранг этой матрицы и ее размеры, найти размерности образа этого отображения?

Что такое изоморфизм линейных пространств? Докажите, что отображение, обратное к изоморфизму, также является изоморфизмом. Что происходит при изоморфизме с линейно независимыми векторами? Докажите, что два конечномерных пространства изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.

Что такое комплексификация линейного пространства? Докажите, что комплексификация пространства $\mathbb{R}^n$ изоморфна пространству $\mathbb{C}^n$.

Что такое инвариантное подпространство линейного оператора? Докажите, что у любого оператора в $\mathbb{C}^n$ есть одномерное инвариантное подпространство, а улюбого оператора в $\mathbb{R}^n$ — двумерное инвариантное подпространство (при $n \geq 2$). Как выглядит матрица линейного оператора в $\mathbb{R}^n$, если первые k векторов базиса составляют базис некоторого инвариантного подпространства этого оператора?

Что такое собственные числа (собственные значения) и собственные векторы линейного оператора? Что такое характеристический многочлен и как он связан с собственными значениями?

Докажите, что у каждого линейного оператора в $\mathbb{C}^n$ есть собственный вектор, а у каждого линейного оператора в $\mathbb{R}^n$ есть одномерное или двумерное инвариантное подпространство.

Докажите, что матрица линейного оператора имеет диагональный вид тогда и только тогда, когда все вектора базиса являются собственными для данного оператора. Приведите примеры диагонализуемого и не диагонализуемого оператора.

Докажите, что если все собственные значения линейного оператора различны (т.е. все они имеют единичную кратность), то этот оператор диагонализуем. Приведите примеры диагонализуемого и не диагонализуемого оператора.

10. Порядок формирования оценок по дисциплине

Контроль знаний студентов включает формы текущего и итогового контроля. Текущий контроль осуществляется в виде двух распределенных домашних заданий (в течение, соответственно, 1-2 и 3-4 модулей), контрольных работ по итогам 2 и 3 моделей, а также коллоквиума в 4 модуле изучения курса. Итоговый контроль осуществляется в виде экзамена в форме (после 2 модуля) и в форме письменной контрольной работы (после 4 модуля). двух письменных экзаменов (после 4 и 6 модуля), а также двух коллоквиумов (в конце 2 и 4 модулей). Итоговые оценки $О_{итог}$ по 10-балльной шкале формируются как округленные до целого числа баллов от 0 до 10 взвешенные суммы, вычисляемые следующим образом.

При оценке за промежуточный экзамен (в конце 2 модуля) накопленная оценка вычисляется по следующей формуле:

$О_{накопленная} = 0,2 * О_{к/р} + 0,1 * О_{д/з} + 0,2 * О_{л} + 0,4 * О_{колл} + 0,1 * О_{сем}$,

где $О_{к/р}$ — оценка за контрольную работу по итогам первого модуля, $О_{д/з}$ — оценка за индивидуальные домашние задания, $О_{л}$ — оценка за устную сдачу задач из листков, $О_{колл}$ — оценка за коллоквиум и $О_{сем}$ — оценка за работу на семинарах. При этом одной из составляющих оценок $О_{л}$ или $О_{д/з}$ может быть оценка за лабораторную работу, выполненную на компьютере. Итоговая оценка выражается через (не округленную) накопленную оценку и оценку за экзамен следующим образом:

$О_{итоговая} = 0,8 * О_{накопленная} + 0,2 * О_{экз}$.

В итоговой оценке накопленная составляющая вычисляется как

$О_{накопленная} = 0,2 * О_{к/р} + 0,1 * О_{д/з} + 0,2 * О_{л} + 0,4 * О_{колл} + 0,1 * О_{сем}$,

где $О_{к/р}$ — оценка за контрольную работу во втором семестре, $О_{д/з}$ — оценка за индивидуальные домашние задания во втором семестре, $О_{л}$ — оценка за сдачу задач из листков (и за лабораторную работу) во втором семестре, $О_{колл}$ — оценка за второй коллоквиум и $О_{сем}$ — оценка за работу на семинарах во втором семестре. При этом одной из составляющих оценок $О_{л}$ или $О_{д/з}$ может быть оценка за лабораторную работу, выполненную на компьютере. Итоговая оценка выражается через (не округленную) накопленную оценку и оценку за экзамен следующим образом:

$О_{итоговая} = 0,8 * О_{накопленная} + 0,2 * О_{экз}$.

Способ округления оценок – арифметический во всех случаях, кроме следующего: оценка более 3 и менее 4 баллов всегда округляется до 3 баллов.

Таблица соответствия оценок по десятибалльной и пятибалльной системе.

По десятибалльной шкале	По пятибалльной системе

1 – неудовлетворительно 2 – очень плохо 3 – плохо	неудовлетворительно – 2
4 – удовлетворительно 5 – весьма удовлетворительно	удовлетворительно – 3
6 – хорошо 7 – очень хорошо	хорошо – 4
8 – почти отлично 9 – отлично 10 - блестяще	отлично - 5

На пересдаче студенту не предоставляется возможность получить дополнительный балл для компенсации оценки за текущий контроль.

В диплом выставляет итоговая оценка по учебной дисциплине.

11. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

11.1. Базовые учебники

1. Курош А. Г. *Курс высшей алгебры.* М., Наука, 1971
2. Винберг Э. Б. *Курс алгебры.* М., Факториал, 1999 и последующие издания

11.2. Основная литература

3. Гельфанд И. М. *Лекции по линейной алгебре*. (Любое издание, кроме 1-го, напр., М., Наука, 1971)

4. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. (Любое издание, напр., М., БИНОМ, 2005)

11.3. Дополнительная литература

5. Aleskerov F., Ersel H., Piontkovski D., *Linear Algebra for Economists.* Berlin—Heidelberg, Springer, 2011
6. Бурмистрова Е. Б., Лобанов С. Г., *Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии*, М., ГУ ВШЭ, 1998
7. Ким Г. Д. , Крицков Л. В., *Алгебра и аналитическая геометрия. Теоремы и задачи. Том I*, М., «Планета знаний», 2007
8. А.И.Кострикин, Ю.И.Манин, *Линейная алгебра и аналитическая геометрия*, М., 1980
9. Сборник задач по алгебре. (Под редакцией А.И.Кострикина). М., «МЦНМО», 2009
10. Городенцев А.Л., *Алгебра. Учебник для студентов-математиков. Часть 1*, М., МЦНМО, 2013

11.4. Справочники, словари, энциклопедии не используются

11.5. Программные средства

Выбор программных средств для реализации алгоритмов осуществляется студентом.

В домашних заданиях для рутинных алгебраических вычислений возможно использование систем Maple или Matlab, а также, в некоторых случаях, интернет-сервиса Wolfram Alpha.

11.6. Дистанционная поддержка дисциплины

Предусмотрена электронная переписка со студентами.