Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

Гавриленко Павел Георгиевич

Изомонодромные деформации и квантовая теория поля

Резюме диссертации

Научный руководитель
Маршаков Андрей Владимирович
д.ф.-м.н., профессор

Москва – 2018

Ведение

В этой диссертации я рассматриваю соответствие между изомонодромными деформациями и конформной теорией поля с W-симметрией. Первый пример такого соответствия был найден Гамаюном, Иорговым и Лисовым в 2012 году: они обнаружили, что общая тау-функция уравнения Пенлеве VI может быть дана в виде разложения в ряд по 4-точечным конформным блокам в $c = 1$ теории. С математической точки зрения эта формула является рядом по паре диаграмм Юнга и по одному целому числу, с коэффициентами, которые даны явными факторизованными выражениями (приходящими из АГТшной формулы для конформного блока). Обобщение этого соответствия на многоточечные конформные блоки и системы Гарнье с более чем 4 точками, которые обобщают уравнение Пенлеве VI, нашли позже.

Случаи, известные ранее, были связаны с изомонодромными деформациями линейной 2×2 фуксовой системы вида

$$\frac{d\Phi(z)}{dz} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{z - z_i}\Phi(z)$$

Такие деформации это одновременные изменения A_i и z_i, которые сохраняют монодромии решений вокруг особых точек. Эти преобразования подчиняются системе нелинейных уравнений Шлезингера:

$$\frac{\partial A_i}{\partial z_j} = \frac{[A_i, A_j]}{z_j - z_j}, \quad \frac{\partial A_i}{\partial z_i} = -\sum_{i \neq j} \frac{[A_i, A_j]}{z_i - z_j}$$

Тау-функция этой системы, в каком-то смысле, самый простой объект. Она корректно определяется своими первыми производными:

$$\frac{\partial}{\partial z_i} \log \tau = \sum_{j \neq i} \frac{\operatorname{tr} A_i A_j}{z_i - z_j}$$

Имеется естественный вопрос об обобщении соответствия между CFT и изомонодромными деформациями на ранг N, больший чем 2. Эта диссертация имеет дело именно с таким обобщением: я показываю, что тау-функции общих $N \times N$ изомонодромных систем связаны с корреляционными функциями примарных полей W_N алгебр. Некоторые части диссертации посвящены исключительно изомонодромным деформациям для того, чтобы сделать исследование более строгим и самодостаточным. Некоторые части посвящены только изучению W-алгебр, но мотивированы их связью с изомонодромными деформациями: а именно, я представляю конструкцию примарных полей W-алгебры, которые обобщают Замолодчиковское поле размерности $\frac{1}{16}$. Корреляционные функции таких полей могут быть посчитаны явно с помощью некоторых конструкций на разветвлённых накрытиях сферы Римана.

Изучение соответствия между CFT и изомонодромными деформациями в случае старшего ранга интересно по нескольким причинам. Одной из причин является то, что как и для случая ранга два, оно даёт явные формулы для изомонодромных тау-функций, которые раньше известны не были. Другая причина заключается в том, что W-алгебры намного более сложные, чем алгебра Вирасоро: например, пространства конформных блоков W-алгебры становятся бесконечномерными значительно быстрее, чем в Вирасоровском случае. В случае W-алгебры даже 3-точечные конформные блоки образуют бесконечномерное пространство, и нету никакого алгебраического способа выбрать из этого пространства какой-то конкретный элемент для того, чтобы использовать его в построении многоточечных конформных блоков. Соответствие между CFT и изомонодромными деформациями даёт способ зафиксировать эту неоднозначность путём фиксации свойств монодромии вертексных операторов.

Диссертация состоит из шести глав и библиографии. Глава 1 это введение в предмет, которое, я надеюсь, должно быть понятно неспециалистам. Она даёт определение основных объектов конформной теории поля, таких как инфинитезимальные конформные преобразования, операторные разложения, алгебра Вирасоро. Дальше есть два примера конформных теорий поля с W-симметрией, теория N свободных безмассовых бозонных полей и теория N безмассовых заряженных фермионов. Я объясняю определение W-алгебр и определение их вертексных операторов вместе с простейшими примерами. Я также объясняю с утилитарной точки зрения, что такое АГТ-соответствие в конформной теории поля. Дальше следует объяснение того, что такое Фуксовы системы, и что такое изомонодромные деформации. После этого я представляю словарь соответствия между конформной теорией поля и изомонодромными деформациями, а затем даю определение Замолодчиковских твист-полей и их обобщения на W_N случай. Последняя часть этой главы содержит план дисертации, список ключевых результатов, краткое содержание каждой главы и список публикаций.

Глава 2

В этой главе я формулирую основную гипотезу о том, что тау-функция общей изомонодромной системы (системы Шлезингера) может быть дана в терминах конформных блоков W-алгебры. Затем я проверяю эту гипотезу для случая 3×3 с 4 особыми точками. Для того, чтобы сделать это, сначала я изучаю структуру решения системы Шлезингера в пределе когда две особые точки сталкиваются. Оказывается, что решение системы даётся рядами по дробным степеням t (расстояния между сталкивающимися точками). Они содержат мономы вида $t^{k+(\boldsymbol{w},\boldsymbol{\sigma})}$, где $\boldsymbol{w}$ это целочисленный вектор, а $\boldsymbol{\sigma}$ это некий произвольный комплексный вектор.

Я проверяю численно, что структура разложения тау-функции в точности совпадает с предсказанием CFT для роста степеней t и имеет форму

$$\tau(t)=\sum_{\boldsymbol{w}\in Q}e^{(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{w})}C^{(0t)}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\theta}_t,\boldsymbol{\sigma}_{0t},\mu_{0t},\nu_{0t})C^{(1\infty)}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{\theta}_1,\boldsymbol{\theta}_\infty,\boldsymbol{\sigma}_{0t},\mu_{1t},\nu_{1t})\times$$
$$\times t^{\frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}_{0t}+\boldsymbol{w},\boldsymbol{\sigma}_{0t}+\boldsymbol{w})-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\theta}_0)-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta}_t,\boldsymbol{\theta}_t)}\mathcal{B}_{\boldsymbol{w}}(\{\boldsymbol{\theta}_i\},\boldsymbol{\sigma}_{0t},\mu_{0t},\nu_{0t},\mu_{1\infty},\nu_{1\infty};t)$$

Я также проверяю, что в случаях когда у нас есть определение и явная формула для W-конформного блока, он совпадает с функцией $\mathcal{B}$. В этому случае я угадываю и проверяю, что 3-точечные функции даются явной формулой, которая обобщает результат Гамаюна-Иоргова-Лисового:

$$C_{\boldsymbol{w}}^{(0t)}(\boldsymbol{\theta}_0, a_t, \boldsymbol{\sigma}) C_{\boldsymbol{w}}^{(1\infty)}(\boldsymbol{\sigma}, a_1, \boldsymbol{\theta}_\infty) = \\ = \frac{\prod_{ij} G[1 - \frac{a_t}{N} + (e_i, \boldsymbol{\theta}_0) - (e_j, \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{w})] G[1 - \frac{a_1}{N} + (e_i, \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{w}) + (e_j, \boldsymbol{\theta}_\infty)]}{\prod\limits_i G[1 + (\alpha_i, \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{w})]}$$

где G это функция Барнса: $G(z+1) = \Gamma(z) G(z)$.

В следующих главах я представляю доказательства этих утверждений разными методами.

Глава 3

В этой главе мы разрабатываем свободнофермионный формализм для W-алгебр. Мы представляем W-токи в терминах фермионов $\psi, \tilde{\psi}$ с помощью следующей формулы:

$$\sum_\alpha \tilde{\psi}_\alpha^{\boldsymbol{\sigma}}(z + \frac{t}{2}) \psi_\alpha^{\boldsymbol{\sigma}}(z - \frac{t}{2}) = \frac{N}{t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} U_k^{\boldsymbol{\sigma}}(z)$$

Затем мы строим вертексные операторы для W-алгебры аксиоматическим способом. А именно, постулируем, что:

1) Вертексный оператор это групповой элемент.
2) Его двухточечные средние выражаются через решение трёхточечной Фуксовой системы.

Затем мы доказываем, что таким образом определённые операторы являются W-примарными полями – это связывает их с конформной частью соответствия. Мы также доказываем, что решение Фуксовой системы с n особыми точками даётся с помощью $(z-w)\mathfrak{K}_{\alpha\beta}(z,w)$, где $\mathfrak{K}_{\alpha\beta}(z,w)$ это двухфермионное среднее в присутствии вертексных операторов:

$$\mathfrak{K}_{\alpha\beta}(z,w) = \frac{\langle \boldsymbol{\theta}_\infty | V_{\boldsymbol{\theta}_{n-2}}(t_{n-2}) \dots V_{\boldsymbol{\theta}_1}(t_1) \tilde{\psi}_\alpha^{\boldsymbol{\theta}_0}(z) \psi_\beta^{\boldsymbol{\theta}_0}(w) | \boldsymbol{\theta}_0 \rangle}{\langle \boldsymbol{\theta}_\infty | V_{\boldsymbol{\theta}_{n-2}}(t_{n-2}) \dots V_{\boldsymbol{\theta}_1}(t_1) | \boldsymbol{\theta}_0 \rangle}$$

В то время как изомонодромная тау-функция даётся знаменателем:

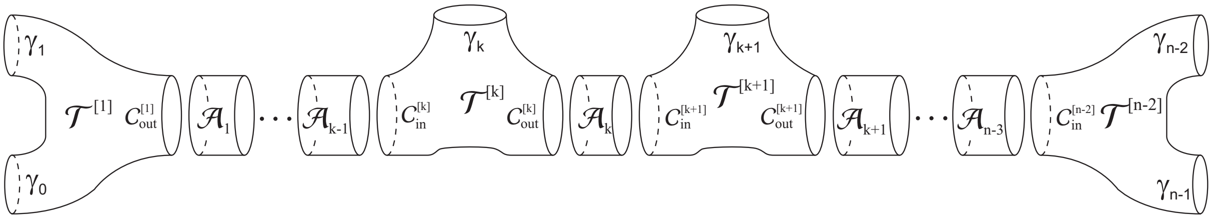
$$\tau(t_1, \dots, t_{n-2}) = \langle \boldsymbol{\theta}_\infty | V_{\boldsymbol{\theta}_{n-2}}(t_{n-2}) \dots V_{\boldsymbol{\theta}_1}(t_1) | \boldsymbol{\theta}_0 \rangle$$

Таким образом мы связываем построенные свободнофермионные операторы с обоими частями соответствия, W-алгебрами и изомонодромными деформациями. Это даёт свободнофермионное доказательство гипотезы из Главы 2.

Мы также показываем, что 4-точечная тау-функция может быть записана как детерминант Фредгольма с некоторым явно заданным ядром, которое даётся в терминах гипергеомтерических функций: $\tau(t) = \det(1 + \mathcal{R}_t)$. Эта формула будет основным объектом изучения в следующей главе.

Chapter 4

Данная глава написана математическим языком и абсолютно строго, потому она не требует никаких знаний из теории поля. Здесь мы развиваем формализм, в котором можно доказать формулу в виде детерминанта Фредгольма, полученную в предыдущей главе из теоретико-полевого рассмотрения, и даже её более общую n-точечную версию. Для этого мы сначала разрезаем сферу с n проколами на $n-2$ сферы с тремя проколами, как на картинке снизу, а затем определяем пространства функций на полученных границах.



После этого мы строим два проектора на пространства функций, которые могут быть продолжены между разными границами, $\mathcal{P}_\Sigma$ и $\mathcal{P}_\oplus$. Эти проекторы даются явными формулами следующего вида:

$$\mathcal{P}_\Sigma f\left(z\right) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_\Sigma} \frac{\hat{\Psi}_+\left(z\right)\hat{\Psi}_+\left(z'\right)^{-1} f\left(z'\right)dz'}{z-z'}, \qquad \mathcal{C}_\Sigma := \bigcup_{k=1}^{n-3} \mathcal{C}_{\mathrm{out}}^{[k]} \cup \mathcal{C}_{\mathrm{in}}^{[k+1]}$$

Эта формула содержит решение n-точечной задачи, даваемое $\hat{\Psi}_+\left(z\right)$, а формула для $\mathcal{P}_\oplus$ содержит решения задач вспомогательных 3-точечных задач, относящихся к разным штанам. Мы ограничиваем построенные проекторы на другое пространство $\mathcal{H}_+$ (некоторая комбинация пространств положительных и отрицательных рядов Лорана): $\mathcal{P}_{\Sigma,+} = \mathcal{P}_\Sigma|_{\mathcal{H}_+}$, $\mathcal{P}_{\oplus,+} = \mathcal{P}_\oplus|_{\mathcal{H}_+}$. Затем мы определяем бесконечномерный детерминант

$$\tau = \det \mathcal{P}_{\Sigma,+}^{-1}\mathcal{P}_{\oplus,+}$$

о котором дальше доказывается, что он совпадает с изомонодромной тау-функцией. Затем мы показываем, что это детерминант может быть переписан как детерминант Фредгольма с ядром, которое даётся с помощью 3-точечных решений. Это делает его абсолютно явным в тех случаях, когда эти решения известны.

Мы также раскладываем найденный детерминант Фредгольма в ряд по главным минорам и вычисляем каждый минор в 2×2 случае. Это комбинаторное разложение имеет вид ряда по набору диаграмм Юнга и целых A_{N-1} решёток:

$$\tau = \sum_{\vec{Q}_1,\ldots\vec{Q}_{n-3}\in\mathfrak{Q}_N} \; \sum_{\vec{Y}_1,\ldots\vec{Y}_{n-3}\in\mathbb{Y}^N} \prod_{k=1}^{n-2} Z_{\vec{Y}_k,\vec{Q}_k}^{\vec{Y}_{k-1},\vec{Q}_{k-1}}\left(\mathcal{T}^{[k]}\right),$$

Более того, выражения $Z_{\vec{Y}_k,\vec{Q}_k}^{\vec{Y}_{k-1},\vec{Q}_{k-1}}\left(\mathcal{T}^{[k]}\right)$ в 2×2 случае могут быть написаны в терминах функций Некрасова, что отождествляет разложение тау-функции с рядом по конформным блокам. Также мы нашли явную редукцию от общего детерминанта Фредгольма к более простому скалярному случаю, который рассматривался Бородином и Дейфтом.

Глава 5

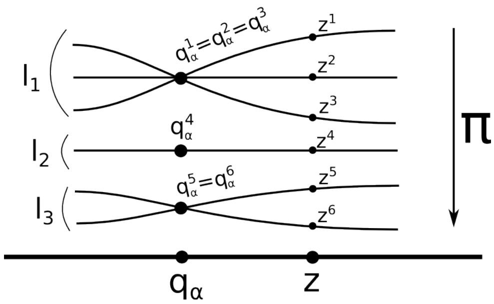
Эта глава посвящена изучению твист-полей W-алгебры. Мы работаем в бозонной реализации W-алгебры в терминах N свободных полей J_α, потому её генераторы пишутся через элементарные симметрические полиномы от бозонных полей:

$$W_k(z) \equiv \sum_{\alpha_1<\ldots<\alpha_k} :J_{\alpha_1}(z)\ldots J_{\alpha_k}(z):$$

Твист-поля занумерованы элементами группы перестановок S_N. Вращение вокруг твист-поля переставляет N бозонных токов, но оставляет W-генераторы нетронутыми:

$$J_k(q_\alpha + \epsilon\cdot e^{2\pi i})\mathcal{O}_s(0) = J_{s(k)}(q_\alpha+\epsilon)\mathcal{O}_s(q_\alpha) \tag{1}$$

Такая конструкция приводит естественным образом к рассмотрению разветвлённого накрытия над сферой Римана, структура ветвления которого определяется твист-полями:



CFTшные рассмотрения в этой главе приводят нас к явной формуле для конформного блока таких полей, которая обобщает Замолодчиковский точный конформный блок:

$$\langle \mathcal{O}_{s_1}(q_1)\mathcal{O}_{s_1^{-1}}(q_2)\ldots\mathcal{O}_{s_L}(q_{2L-1})\mathcal{O}_{s_L^{-1}}(q_{2L})\rangle = \tau_{SW}(\mathbf{q})\cdot\tau_B(\mathbf{q})$$

В этой формуле $\tau_B(\mathbf{q})$ это так называемая тау-функция Бергмана, и она не зависит от W-зарядов. Более интересная часть это

$$\log\tau_{SW} = \tfrac{1}{2}\sum_{I,J} a_I\mathcal{T}_{IJ}a_J + \sum_I a_I U_I(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}\sum_{q^i_\alpha\neq q^j_\beta} r^i_\alpha r^j_\beta \log\Theta_*(A(q^i_\alpha)-A(q^j_\beta)) -$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{q^i_\alpha}(r^i_\alpha)^2 l^i_\alpha \log\frac{d(z(q)-q_\alpha)^{1/l^i_\alpha}}{h^2_*(q)}\Bigg|_{q=q^i_\alpha}$$

Это выражение содержит матрицу периодов разветвлённого накрытия $\mathcal{T}_{IJ}$, W-заряды в промежуточных каналах a_I, некоторые дополнительные $U(1)$ заряды r^i_α, некоторые комбинации отображений Абеля U_I, нечётную тэта-функцию Римана Θ_* и соответствующую голоморфную 1-форму h^2_*. Эта формула получается как решение системы интегрируемых уравнений, так называемых уравнений Зайберга-Виттена:

$$a_I = \oint_{A_I} dS, \quad \frac{\partial}{\partial a_I}\log\tau_{SW} = \oint_{B_I} dS$$

Похожие уравнения описывают низкоэнергетическое поведение $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричных калибровочных теорий, которые также тесно связаны с CFT в силу АГТ соответствия.

Другой результат этой главы состоит в отождествлении преобразования Фурье от конформного блока с тау-функцией для квазиперестановочных монодромий, известной благодаря Короткину:

$$\tau_{IM}(\mathbf{q}|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^g} \mathcal{G}_0(\boldsymbol{q}|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{n}) e^{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})} = \tau_B(\boldsymbol{q}) \exp\left(\tfrac{1}{2} Q(\mathbf{r})\right) \Theta \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix} (\boldsymbol{U})$$

Этот факт даёт ещё одно подтверждение соответствию между W-алгебрами и изомонодромными деформациями.

Глава 6

Эта глава тоже посвящена W-твист-полям, но с более алгебраической точки зрения. Здесь мы рассматриваем ещё W-алгебры для ортогональных серий. Мы начинаем со свободнофермионного определения W-алгебр. Их генераторы в B- и D-сериях могут быть записаны в терминах комплексифицированных действительных фермионов следующим образом:

$$U_k(z) = \tfrac{1}{2} D_z^{k-1} \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\psi_\alpha^*(z) \cdot \psi_\alpha(z) + \psi_\alpha(z) \cdot \psi_\alpha^*(z)\right) + \tfrac{1}{2} D_z^{k-1} \Psi(z) \cdot \Psi(z)$$

$$V(z) = \prod_{\alpha=1}^{N} : \psi_\alpha^*(z) \psi_\alpha(z) : \Psi(z)$$

где D_z это производная Хироты. Конструкцию твист-полей мы тоже переформулируем в терминах фермионов. Оказывается, что сейчас правильным объектом, который параметризует твист-поля, будет нормализатор алгебры Картана $\mathrm{N}_G(\mathfrak{h})$. Разные классы сопряжённости в $\mathrm{N}_G(\mathfrak{h})$ дают разные твист-поля.

Главной темой главы является вычисление характеров модулей, построенных из твист-полей. Типичный пример такого характера это формула для твист-поля, которое соответствует элементу g, состоящему из K циклов длин l_i с дополнительными диагональными множителями r_i:

$$\chi_g(q) = q^{\sum\limits_{j=1}^{K} \frac{l_j^2 - 1}{24 l_j}} \frac{\sum\limits_{n_1 + \ldots + n_K = 0} q^{\sum\limits_{i=1}^{K} \frac{1}{2l_i}(r_i l_i + n_i)^2}}{\prod\limits_{j=1}^{K} \prod\limits_{k=1}^{\infty} (1 - q^{k/l_j})}$$

В числителе мы видим решёточную A_{K-1} тэта-функцию.

Одна из частей этой главы посвящена ситуации когда $g_1 \sim g_2$ сопряжены в G при неэквивалентных $g_1, g_2 \in \mathrm{N}_G(\mathfrak{h})$. Мы показываем, что в этом случае два разных характера совпадают $\chi_{g_1}(q) = \chi_{g_2}(q)$. Это даёт ряд нетривиальных тождеств на характеры, которые мы также доказываем явно. Некоторые из них совпадают с тождеством Макдональда, а некоторые кажутся новыми. Одним из методов счёта характеров являются экзотические бозонизационные формулы, которые связывают фермионы и бозоны с разными гранусловиями: например бозонизация периодического и антипериодического фермионов в один антипериодический бозон.

В этой главе мы также считаем конформные блоки твист-полей для D-серии. Главная особенность этого случая состоит в структуре $2N$-листного накрытия, которая может быть показана на следующей коммутативной диаграмме:

$$\begin{tikzcd} \sigma \circlearrowright \Sigma \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[rr, bend left, "\pi_{2N}"] & \tilde{\Sigma} \arrow[r, "\pi_N"] & \mathbb{CP}^1 \end{tikzcd}$$

Это накрытие имеет инволюцию σ, и его фактор по этой инволюции становится меньшим N-листным накрытием. Большая часть объектов, которые используются в конструкции, являются σ-антисимметричными: например, единственная важная часть матрицы периодов это матрица периодов Прима. Желаемая формула для конформного блока в этом случае имеет структуру, похожую на A-случай:

$$\mathcal{G}_0(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}) = \tau_B(\Sigma|\boldsymbol{q})\tau_B^{-1}(\tilde{\Sigma}|\boldsymbol{q})\tau_{SW}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{q})$$

В некоторых случаях она также может вырождаться к формуле для A-серии.

Заключение

Эта диссертация содержит некоторое число конструкций, которые дают явные формулы для изомонодромных тау-функций, для конформных блоков W-алгебр, и связывают некоторые из них между собой. Основными техническими средствами являются свободнополевые конструкции вертексных операторов, использование интегрируемой системы Зайберга-Виттена и манипуляции с проекторо-подобными операторами на функциональных пространствах.

Ссылки

Содержание Глав 2-6 основывается на следующих статьях, по порядку:

2. P. Gavrylenko, *Isomonodromic τ-functions and W_N conformal blocks*, JHEP09(2015)167, [hep-th/1505.00259]

3. P. Gavrylenko, A. Marshakov, *Free fermions, W-algebras and isomonodromic deformations*, Theor. Math. Phys. 2016, 187:2, 649–677, [hep-th/1605.04554]

4. P. Gavrylenko, O. Lisovyy, *Fredholm determinant and Nekrasov sum representations of isomonodromic tau functions*, [math-ph/1608.00958], на рецензии в Communications in Mathematical Physics

5. P. Gavrylenko, A. Marshakov, *Exact conformal blocks for the W-algebras, twist fields and isomonodromic deformations*, JHEP02(2016)181,[hep-th/1507.08794]

6. M. Bershtein, P. Gavrylenko, A. Marshakov, *Twist-field representations of W-algebras, exact conformal blocks and character identities* , [hep-th/1705.00957], на рецензии в Communications in Mathematical Physics