# Содержание программы

В данном разделе представлен список вопросов по основным дисциплинам, входящим в итоговый междисциплинарный экзамен. Основная литература для подготовки указана в следующем разделе.

**6.1. Уравнения математической физики**

1. Интегрирование квазилинейных уравнений с частными производными первого порядка методом характеристик. Геометрический смысл решения.

2. Алгоритм решения задачи Коши для нестационарного уравнения Гамильтона-Якоби.

3. Формула Пуассона для решения уравнения теплопроводности.

4.  Решение первой краевой задачи для волнового уравнения на полуоси.

5. Метод спуска для двумерного волнового уравнения.

**6.2. Теория вероятностей и математическая статистика**

1. Случайные события и действия над ними. Определение и свойства вероятности. Формула сложения. Классическое определение вероятности.

2. Условные вероятности. Формула умножения. Независимость событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

3. Случайные величины (одномерные и многомерные). Функция распределения случайной величины и ее свойства. Независимость случайных величин.

4. Дискретные случайные величины. Примеры распределений дискретных случайных величин (биномиальное, геометрическое, гипергеометрическое, пуассоновское).

5. Абсолютно непрерывные случайные величины. Плотность распределения и ее свойства. Примеры абсолютно непрерывных распределений (равномерное, нормальное, показательное).

6. Моменты случайных величин. Свойства математического ожидания, дисперсии и ковариации, примеры их вычисления.

7. Неравенство Чебышева и закон больших чисел, примеры его применений.

8. Характеристические и производящие функции. Центральная предельная теорема и теорема Муавра - Лапласа, как ее частный случай.

9. Порядковые статистики, их распределения и использование для оценивания квантилей распределения.

10. Эмпирическая функция распределения и ее свойства.

11. Теорема Колмогорова и ее применения.

12. Точечные оценки и их свойства. Точечное и доверительное оценивание параметра биномиального распределения.

13. Метод максимального правдоподобия. Свойства оценок максимального правдоподобия. Примеры (биномиальное и нормальное распределения).

14. Проверка гипотез для дискретных данных. Критерий хи-квадрат.

**6.3. Методы оптимизации**

1. Гладкая задача без ограничений в произвольных банаховых пространствах. Теорема о необходимых условиях экстремума (принцип Ферма).

2. Необходимые условия экстремума в конечномерных пространствах. Необходимые условия второго порядка и достаточные условия экстремума в конечномерных пространствах.

3. Гладкая задача с равенствами в произвольных банаховых пространствах. Теорема о необходимых условиях экстремума (принцип Лагранжа).

4. Необходимые условия экстремума в конечномерных пространствах.

5. Гладкая задача с равенствами и неравенствами в произвольных банаховых пространствах. Теорема о необходимых условиях экстремума. Соответствующее утверждение о необходимых условиях экстремума в конечномерных пространствах.

6. Классическое вариационное исчисление. Задача Больца без ограничений. Теорема о необходимых условиях экстремума.

7. Классическое вариационное исчисление. Простейшая задача. Теорема о необходимых условиях экстремума (условия первого порядка). Условия второго порядка в простейшей задаче (условия Лежандра и Якоби для одномерного случая). Теоремы о необходимых условиях второго порядка и достаточных условиях экстремума в простейшей задаче.

8. Оптимальное управление. Классическая задача с фиксированным интервалом времени и закреплённым левым концом траектории. Принцип максимума Понтрягина (формулировка теоремы).

**6.4. Дискретная математика (математическая логика, теория графов, теория алгоритмов)**

1. Что такое дизъюнктивная нормальная форма булевой функции? Что такое ее совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ)? Приведите примеры. Докажите, что всякая ненулевая булева функция обладает единственной СДНФ. Приведите пример нахождения СДНФ.

2. Что такое функциональное замыкание совокупности булевых функций? Какая совокупность называется функционально замкнутой? полной? Приведите примеры. Опишите классы булевых функций S, L, М, Т0, Т1. Являются ли они функционально замкнутыми? полными? (ответ обоснуйте). Сформулируйте теорему Поста о полноте. Приведите пример ее применения: полна ли совокупность булевых функций

?

3. Какой граф называется эйлеровым? В чем состоит критерий эйлеровости графа? Приведите пример нахождения эйлерова цикла в эйлеровом графе. В чем состоит критерий того, что связный граф (с конечным числом вершин и ребер) можно нарисовать, не отрывая руки и не проводя дважды по одному и тому же ребру (ответ обоснуйте)? Проиллюстрируйте на конкретном примере алгоритм, описывающий как нарисовать указанным способом граф, который удовлетворяет этому критерию.

4. Что такое сеть, ее пропускная способность, поток в сети, величина потока, разрез, пропускная способность разреза? Приведите примеры. Сформулируйте теорему Форда-Фалкерсона. Проиллюстрируйте алгоритм нахождения потока максимальной величины на примере какой-либо конкретной сети, имеющей 6 вершин и 15 ребер, и в которой нет ребер с нулевой пропускной способностью.

5. Дайте определение линейной рекуррентной последовательности. Приведите пример. Опишите способ получения формулы, выражающей ее n-й член через п. Что такое числа Фибоначчи? Выведите формулу, выражающую n-е число Фибоначчи через п.

6. Дайте определения топологической замкнутой поверхности без края, ориентируемой и неориентируемой топологической поверхности, приведите примеры. Сформулируйте теорему о классификации топологических замкнутых поверхностей без края.

7. Что такое формула включения и исключения? Приведите пример ее применения.

**6.5. Случайные процессы и теория массового обслуживания**

1. Процессы восстановления. Функция восстановления, интегральные уравнения восстановления. Стационарные процессы восстановления. Формулировка элементарной и узловой теорем восстановления.

2. Марковские цепи. Определение. Однородные Марковские цепи. Матрица переходных вероятностей за один и за несколько шагов. Классификация состояний цепи.

3. Марковские цепи. Классификация состояний и цепей. Возвратность, существенные и несущественные состояния, положительные и нулевые состояния. Период состояния.

4. Марковские процессы с непрерывным временем и дискретным множеством состояний. Однородные процессы. Переходные вероятности и их свойства. Интенсивности перехода, Уравнения Колмогорова.

5. Марковские процессы гибели и размножения с конечным и счетным множеством состояний. Интенсивности перехода, уравнения Колмогорова, анализ вероятностей состояний при бесконечном времени.

6. Процесс Пуассона. Определение, свойства, характеристики.

**6.6. Численные методы**

1. Метод Ньютона для решения нелинейных уравнений.

2. Норма вектора и матрицы. Обусловленность задачи решения системы линейных алгебраических уравнений.

3. Метод простой итерации для решения систем линейных алгебраических уравнений. Сходимость метода.

4. Метод прогонки. Свойства метода прогонки.

5. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Погрешность интерполяции.

6. Численное интегрирование. Формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона.

7. Численное дифференцирование.

8. Явный и неявный метод Эйлера. Модификации метода Эйлера 2 порядка точности.

9. Методы Рунге-Кутты 2 порядка точности.

**6.7. Операционные системы**

1. Понятие ядра ОС. Функции ядра. Типы прерываний. Вектора прерываний и обработчики. Понятие процесса/потока. Состояния процесса/потока. Операции над процессами. Блок управления (дескриптор) процесса. Понятия: задания, нити, параллельного процесса, асинхронного процесса, взаимоисключения, семафора, мьютекса, события, критической секции, тупика. Приоритет процесса/потока.

2. Понятия файла, символьного набора. Типы файлов. Типы организации файлов. Блок управления (дескриптор) файла. Средства файловой системы. Топология файловой системы. Подходы к реализации файлов и каталогов.

**6.8. Дифференциальные уравнения**

1. Дайте определение задачи Коши обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, разрешённого относительно производной. Сформулируйте теорему Коши-Липшица. Приведите (с обоснованием) условия на функцию , из которых следует, что функция удовлетворяет условию Липшица. Покажите, что условие Липшица слабее рассмотренных условий. Приведите пример нарушения единственности решения рассматриваемой задачи Коши, если не существует.

2. Сформулируйте теорему об общем решении линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами с правой частью в виде квазимногочлена. Докажите её для линейного однородного уравнения в случае некратных корней характеристического многочлена.

3. Дайте определение фундаментальной системы решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений (ЛОС). Докажите теорему об общем решении ЛОС.

4. Изложите классификацию изолированных особых точек уравнения в терминах характеристических корней. Приведите примеры для различных соотношений между характеристическими корнями.

5. Дайте определение устойчивого и асимптотически устойчивого решения системы дифференциальных уравнений. Приведите примеры исследования устойчивости решения системы по определению.

**6.9. Математический анализ**

1. Докажите теорему Коши о промежуточном значении непрерывной функции на отрезке. Изложите метод решения уравнений  методом деления отрезка пополам. Докажите, что уравнение имеет решение на отрезке . Как его найти с точностью 0,00001?

2. Выведите формулу Тейлора–Пеано. Определите при малых значениях  знак функции

3. Выведите формулу Тейлора–Лагранжа. Вычислите  с точностью .

4. Дайте определение частичной суммы числового ряда. Дайте определение сходящегося числового ряда и его суммы. Выведите интегральный признак сходимости числового ряда. При каких значениях  сходится ряд ?

5. Дайте определение точки локального экстремума функции нескольких переменных. Выведите необходимое условие локального экстремума для дифференцируемых функций. Выведите достаточное условие локального экстремума и его отсутствия. Найдите точки локального экстремума функции  и укажите, к какому типу они относятся.

6. Изложите с обоснованием метод, позволяющий найти наибольшее и наименьшее значение гладкой функции в ограниченной замкнутой области с "хорошей" (кусочно-гладкой) границей. Найдите максимум и минимум функции  в шаре .

7. Разложите в ряд Фурье функцию на отрезке . Записав равенство Парсеваля для этой функции, выведите равенство.

8. Дайте определение интеграла от функции по области (или ). Расскажите о методах вычисления кратных интегралов (сведение к повторному, замена переменной). Вычислите 

9. Дайте определения криволинейных интегралов 1-го и 2-го рода. Поясните их физический смысл. Найдите работу поля по кривой .

10. Дайте определение поверхностных интегралов 1-го и 2-го рода. Поясните их физический смысл. Найдите поток поля через поверхность .

**6.10. Линейная алгебра и геометрия**

1. Геометрия.

1.1. Скалярное и векторное произведения в R³. Вычисление произведений в координатах. Объем параллелепипеда и треугольной пирамиды. Площадь треугольника в пространстве.

1.2. Общее уравнение плоскости и канонические уравнения прямой в пространстве. Критерий параллельности прямой и плоскости. Условие существования общей точки у двух прямых в пространстве.

1.3. Кривые второго порядка Эллипс, гипербола и парабола как геометрические места точек. Канонические уравнения кривых второго порядка и их графики.

2. Линейная алгебра.

2.1. Элементарные преобразования матриц. Приведение к ступенчатому и главному ступенчатому виду. Решение линейных систем методом Гаусса. Ранг матрицы. Невырожденные матрицы. Связь между рангами матрицы и ее транспонированной.

2.2. Умножение матриц. Ассоциативность. Умножение и транспонирование. Обратная матрица и критерий ее существования. Определитель. Определитель и невырожденность. Определитель и произведение матриц.

2.3. Пространство Rn . Линейная зависимость и независимость векторов. Базис. Линейные подпространства и их размерность.

2.4. Линейные операторы и их матрицы. Собственные числа и собственные векторы. Характеристический многочлен. Вещественные симметрические матрицы и свойство их характеристического многочлена.

3. Алгебра.

3.1. Группы. Группы порядка 3 и 4. Порядок элемента в группе. Связь между порядком элемента в конечной группе и порядком самой группы. Циклические и абелевы группы. Группы Zn и Zn\*. Порядок группы Zn\*, условие ее цикличности.

**6.11. Программирование**

1. Контейнеры stl. Перечислить основные контейнеры stl их особенности. Привести примеры использования классов stl для работы со строками и массивами. Итераторы. Сортировка массивов средствами stl.

2. Принципы наследования и композиции при конструировании новых классов (привести примеры). Что такое виртуальное наследование? Порядок вызова конструкторов и деструкторов при композиции и наследовании. Конструктор копирования. Спецификаторы доступа. Перегрузка методов класса. Перегрузка операторов. Привести примеры.

3. Методы и свойства класса. Статические методы и статические свойства. Константные методы. Виртуальные методы и полиморфизм. Абстрактные классы. Привести примеры.

4. Статические и динамические массивы. Операции с указателями в C++. Использование ссылок. Особенности передачи параметров в функцию (по значению или по ссылке). Привести примеры.

5. Обобщенное программирование. Шаблонные функции и шаблонные классы. Примеры шаблонной функций swap, меняющей местами значения переданных ей элементов. Пример шаблонного класса Pair, содержащего пару немонотипных элементов.

**6.13. Теория управления**

1. Преобразование Лапласа. Примеры применения для решения линейных дифференциальных уравнений.

3. Управляемость линейных систем управления. Критерий управляемости.

4. Наблюдаемость линейных систем. Критерий наблюдаемости.

5. Устойчивость линейных систем по Ляпунову, асимптотическая устойчивость.