Программа переводного экзамена по алгебре за первый курс

Факультет математики НИУ ВШЭ

3 апреля 2018 г.

Формат экзамена

Экзамен проходит в форме письменной работы продолжительностью 3 часа (180 минут).

Вариант состоит из 6–8 задач.

Для подготовки рекомендуются задачи с семинаров 2015/16 учебного года: `https://math.hse.ru/algebra_2015`.

Программа экзамена

Тема 1. Группы. Группы преобразований и абстрактные группы. Группы многогранников. Симметрическая группа, чётность и цикловой тип перестановки, реализация абстрактной группы подгруппой группы перестановок, техника вычислений в группе перестановок. Разбиение группы на смежные классы подгруппы, индекс подгруппы, теорема Лагранжа. Циклические подгруппы и порядки элементов. Действие группы на множестве, длины орбит и порядки стабилизаторов, стабилизаторы точек одной орбиты сопряжены. Ядро и образ гомоморфизма групп, нормальные подгруппы, факторизация и строение гомоморфизма. [1, гл. 4] [3, §1, 15]

Тема 2. Коммутативные кольца и поля. Поле комплексных чисел, техника вычислений с комплексными числами, алгебраическая замкнутость поля $\mathbb{C}$. Кольца многочленов и формальных степенных рядов, разложение рациональной функции в формальный ряд, деление многочленов с остатком, отыскание кратных корней и общих корней нескольких многочленов. Разложение на простейшие дроби в поле рациональных функций от одной переменной. Кольца вычетов и конечные поля, техника вычислений в кольце вычетов, теорема Эйлера, китайская теорема об остатках. Прямая сумма колец. Идеалы и факторизация, теорема о гомоморфизме колец. [1, § 3.1–3.4] [3, §2–4, 6]

Тема 3. Делимость в евклидовых кольцах. Алгоритм Евклида, евклидовость колец $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{K}[x]$. НОД и НОК. Евклидовы кольца являются областями главных идеалов, области главных идеалов факториальны. [1, §3.5] [3, §6]

Тема 4. Векторные пространства и линейные операторы. Линейные оболочки, линейная зависимость, базисы, размерность, координаты. Построение базисов методом Гаусса. Задание подпространств уравнениями и порождающими векторами, отыскание размерностей и базисов в суммах и в пересечениях подпространств. Двойственные пространства и двойственные базисы, биекция между подпространствами и их аннуляторами. Ядро и образ линейного отображения, связь между размерностями ядра и образа, образ является факторпространством по ядру. [1, гл. 2, §5.1, 5.2] [3, §7]

Тема 5. Алгебра матриц. Матричный формализм для линейных выражений одних векторов через другие, матрицы перехода между базисами и матрицы линейных отображений. Сложение и умножение матриц. Решение систем линейных уравнений и отыскание обратной матрицы методом Гаусса (над полем), две системы равносильны тогда и только тогда, когда их строгие ступенчатые матрицы одинаковы. Ранг матрицы, строчный ранг равен столбцовому. Полная линейная группа. [1, гл. 2] [3, §9]

Тема 6. Определители. Ориентированный объём параллелепипеда, единственность (с точностью до пропорциональности) формы объёма n-мерного параллелепипеда на n-мерном пространстве. Определитель матрицы, отношение объёмов двух базисов равно определителю матрицы перехода, мультипликативность определителя. Техника вычисления определителей. Использование определителей для нахождения ранга матрицы и решения систем линейных уравнений. Простота специальной линейной группы. [1, §2.4, 2.5] [3, §10]

Тема 7. Жорданова нормальная форма оператора Собственные векторы, собственные подпространства, собственные значения оператора. Корневые подпространства. Структура нильпотентного оператора, разложение пространства с нильпотентным оператором в сумму циклических подпространств. Теорема о жордановой нормальной форме. Жорданов базис, способ его нахождения. Характеристический и минимальный многочлен оператора. Теорема Гамильтона–Кэли. [1, гл. 6] [2, III] [3, §13]

Тема 8. Модули над евклидовыми кольцами Модули над кольцами, примеры. Конечнопорожденные модули, свободные модули, модули кручения, циклические модули. Ранг свободного модуля. Подмодули свободных модулей. Теорема о взаимных базисах. Разложение модуля над евклидовым кольцом в прямую сумму примарных циклических. Следствия: теорема о структуре конечнопорожденных абелевых групп, теорема о жордановой нормальной форме. [1, §9.1–9.3] [3, §12]

Тема 9. Квадратичные и билинейные формы Определение. Симметрические и кососимметрические билинейные формы. Квадратичная форма. Поляризация. Ядро и ранг формы. Ортогонал подпространства; критерий разложимости пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонала. Приведение квадратичной формы к диагональному виду методом Лагранжа. Канонический вид квадратичной формы над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$. Сигнатура формы, положительная определенность. Метод Якоби, критерий Сильвестра. Канонический вид кососимметрической формы. [1, §5.3–5.5] [3, §17]

Тема 10. Евклидовы и эрмитовы пространства Евклидовы пространства. Отождествление V и V^* с помощью скалярного произведения. Линейные операторы в евклидовом пространстве, инвариантность ортогонального дополнения к инвариантному подпространству. Симметрические и кососимметрические операторы. Диагонализуемость симметрического оператора. Ортогональные операторы, их канонический вид. Полуторалинейные формы. Эрмитовы (унитарные) пространства. Эрмитовы, косоэрмитовы, унитарные операторы, их диагонализуемость, собственные значения. [1, §5.4–5.5, 6.3] [3, §14, §20]

Тема 11. Алгебра многочленов Нетеровы кольца. Существование разложения в произведение простых. Лемма Гаусса, факториальность кольца $A[x]$ для факториального кольца A. Факториальность кольца $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Симметрические многочлены. Основная теорема о симметрических многочленах. [1, §3.6–3.8, 9.4] [3, §26]

Тема 12. Тензоры Тензорное произведение векторных пространств. Универсальное свойство. Изоморфизм $\mathrm{Hom}(V, W) \cong V^* \otimes W$. Тензорная алгебра. Свёртка. Формализм Эйнштейна.

Симметрические и кососимметрические тензоры. Симметризация и кососимметризация. Симметрическая и внешняя алгебра. Многообразия Грассмана, Веронезе и Сегре. [1, гл. 8] [2, IV] [3, §23, 24]

Список литературы

[1] Э. Б. Винберг. Курс алгебры. М.: МЦНМО, 2011 (или любое другое издание).

[2] И. М. Гельфанд. Лекции по линейной алгебре. М.: Добросвет, 2009 (или любое другое издание).

[3] А. Л. Городенцев. Алгебра. Учебник для студентов-математиков. М.: МЦНМО, 2013.

[4] А. И. Кострикин. Введение в алгебру, тт. 1–3. М.: МЦНМО, 2012 (или любое другое издание).

[5] А. И. Кострикин (ред.). Сборник задач по алгебре. М.: МЦНМО, 2015 (или любое другое издание).