

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
РОССИЙСКИЙ ФОНД ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ ТАТАРСТАН
КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

**МЕЖДУНАРОДНАЯ МОЛОДЕЖНАЯ ШКОЛА-СЕМИНАР
«СОВРЕМЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ»**

**МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
«СОВРЕМЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ»**

Сборник трудов

Казань, 27 ноября – 3 декабря 2017 г.



**КАЗАНЬ
2017**

УДК 512.54+514.1+514.7+514.8+515.1+517.5+517.9
ББК 22.15

М43

*Издание осуществлено при финансовой поддержке РФФИ
и Правительства Республики Татарстан (проект № 17-41-161021)*

*Печатается по рекомендации Ученого совета
Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского*

Международная молодежная школа-семинар «Современная геометрия и ее приложения». Международная научная конференция «Современная геометрия и ее приложения»: сборник трудов. – Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2017. – 172 с.

ISBN 978-5-00019-915-2

Материалы сборника предназначены для научных сотрудников, аспирантов, магистрантов и студентов старших курсов, специализирующихся в области геометрии и её приложений.

УДК 514.822+517.518.234+517.548.3
ББК 22.15

ISBN 978-5-00019-915-2

© Издательство Казанского университета, 2017

СОДЕРЖАНИЕ

<i>L.I. Nigmatullina.</i> On the 3–transitivity of transformation group of the Lobachevsky plane in the Beltrami–Klein model	6
<i>A.A. Popov.</i> Wormholes	7
<i>S.G. Rubin.</i> Role of geometry in modern physics	11
<i>S.E. Stepanov, T.V. Dmitrieva.</i> On conformal Killing and harmonic forms on Riemannian symmetric spaces	15
<i>S.E. Stepanov, I.I. Tsyganok.</i> On infinitesimal harmonic transformations on complete Riemannian manifolds	16
<i>А.В. Аминова, Д.Р. Хакимов.</i> Об интегрировании уравнения Эйзенхарта и h -пространствах типа {221}	17
<i>К.В. Андреев.</i> Об альтернативно-эластичных алгебрах при $n \bmod 8 = 0$	19
<i>А.В. Багаев, Н.И. Жукова.</i> Трансверсально аналитические лоренцевы слоения коразмерности два со связностью Эресмана на n -мерных многообразиях	24
<i>М.Б. Банару.</i> О почти контактных метрических гиперповерхностях с малыми типовыми числами в АК-многообразиях	27
<i>О.О. Белова.</i> Об аналоге связности Нейфельда в пространстве центрированных плоскостей	30
<i>Х.Х. Бурчаев, Г.Ю. Рябых.</i> Об одной экстремальной задаче для суммируемых аналитических функций	33
<i>В.В. Волчков, Вит.В. Волчков.</i> Современные проблемы нетрадиционной интегральной геометрии	34
<i>А.В. Вялова.</i> Тензорность кривизны фундаментально-групповой связности, ассоциированной с конгруэнцией гиперцентрированных плоскостей	36
<i>С.В. Галаев.</i> Почти эрмитова структура на пространстве расслоения допустимых ортонормированных реперов	38
<i>И. Гинтерлейтнер, Н.И. Гусева, Й. Микеш.</i> Конформные отображения на компактные пространства Эйнштейна	39
<i>Т.А. Гончар, Е.И. Яковлев.</i> О причинной структуре расслоенных лоренцевых многообразий	41
<i>А.Ю. Долгоносова.</i> О группе автоморфизмов слоений с трансверсальной линейной связностью в категории слоений	44
<i>Н.О. Ермилов.</i> Замощение плоскости Лобачевского	45
<i>Н.И. Жукова.</i> Жесткие геометрии на сингулярных пространствах слоев слоений и группы их автоморфизмов	48
<i>С.К. Зубкова.</i> Трансверсальные расслоения второго порядка в категории многообразий над алгебрами	51
<i>К.М. Зубрилин.</i> Уплотненные инфинитезимальные преобразования касательного расслоения со связностью горизонтального лифта, порожденные инфинитезимальными конциркулярными преобразованиями базы	53
<i>М.О. Катанаев.</i> Геометрическая теория дефектов	56

<i>В.В. Казак, Н.Н. Солохин.</i> Условия разрешимости смешанного краевого условия в теории бесконечно малых изгибаний	67
<i>С.Б. Климентов.</i> Об изоморфности некоторых функциональных пространств при действии интегро-дифференциальных операторов	68
<i>Д.С. Климентов.</i> Стохастический аналог уравнений Гаусса-Петерсона-Кодацци для поверхностей ограниченного искривления	72
<i>В.Н. Кокарев.</i> О кривизне Риччи-плоских кэлеровых многообразий	73
<i>А.В. Костин, Н.Н. Костина.</i> Об интерпретации асимптотических направлений .	75
<i>А.Г. Кушнер.</i> Контактная геометрия уравнений Монжа-Ампера и инварианты Лапласа	76
<i>А.И. Макосий.</i> К построению гамильтоновых циклов графа Кэли группы, порожденной тремя инволюциями	80
<i>А.Н. Макоха.</i> Геометрическая конструкция линейного комплекса плоскостей, ассоциированного с тривектором типа (884;400).	82
<i>А.А. Малюгина, В.В. Шурыгин.</i> Псевдогруппа голономии \mathbb{D} -гладкого многообразия и структуры \mathbb{D} -гладких многообразий на торе	86
<i>Й. Микеш, В.Е. Березовский, И. Гинтерлейтнер.</i> Об основных уравнениях геодезических отображений	88
<i>А.С. Мищенко.</i> Деривации групповых алгебр	92
<i>А.Э. Пасенчук.</i> О теории символа оператора Теплица в пространстве гладких функций	98
<i>Н.С. Перминов, Ш.Р. Шакиров.</i> Функциональная статистика и топологическая спектроскопия для квантовой информатики	100
<i>К.В. Полякова.</i> Касательное расслоение к расслоению линейных реперов . . .	102
<i>В.А. Попов.</i> Алгебра векторных полей Киллинга и её стационарная подалгебра	106
<i>Е.Д. Родионов, В.В. Славский.</i> Обобщенное полярное преобразование конформно-плоских метрик положительной кривизны	108
<i>М.Д. Рооп.</i> Затопленные струи как сингулярные решения уравнений Навье-Стокса	112
<i>А.К. Рыбников.</i> Дифференциально-геометрические структуры, ассоциированные с лагранжианами, соответствующими скалярным физическим полям. . .	115
<i>Л. Рыпарова, Й. Микеш.</i> Поворотные отображения поверхностей вращения . .	120
<i>Н.А. Рязанов.</i> Дифференциальные сравнения компонент объекта кривизны аффинной связности 2-го порядка в несимметричном случае.	122
<i>А.А. Сабьканов, Й. Микеш, П. Пешка.</i> О полусимметрических проективно евклидовых пространствах.	123
<i>Е.Н. Синюкова.</i> Геометрия касательного расслоения риманова пространства, индуцированная инвариантной теорией приближений базового пространства	125
<i>Е.Н. Сосов.</i> О действиях групп вещественных чисел на пространстве Лобачевского, сохраняющих пучки прямых.	127
<i>И.С. Стрельцова.</i> Проективные инварианты прямолинейных 2-тканей	129
<i>В.И. Субботин.</i> О многогранниках с ромбическими гранями и параллелоэдрах.	132
<i>А.Я. Султанов.</i> Аффинные преобразования одного типа линейной связности .	134

<i>Г.А. Султанова.</i> Об алгебрах Ли инфинитезимальных аффинных преобразований касательных расслоений со связностью полного лифта над двумерными максимально-подвижными пространствами	137
<i>А.В. Тимофеевко, Д.Н. Судак, А.А. Черепухина.</i> Составленные не более, чем из 16 правильных пирамид выпуклые тела с такими как у пирамид или вдвое большими рёбрами	140
<i>И.А. Тимофеевко.</i> О применении инволюций, порождающих группу симметрий	142
<i>П.И. Трошин.</i> Об одном способе построения треугольника Серпинского на плоскости Лобачевского	144
<i>Е.В. Тюриков.</i> Некоторые новые результаты мембранной теории выпуклых оболочек	148
<i>В.Т. Фоменко.</i> Омбилические поверхности в евклидовых пространствах.	150
<i>М.А. Чешкова.</i> Тор и односторонние поверхности	154
<i>Ю.И. Шевченко, Е.В. Скрыдлова.</i> Неголономность фактор-многообразия голономного распределения на полуголономном гладком многообразии	157
<i>А.М. Шелехов.</i> О "шестиугольных" решениях некоторых уравнений в частных производных	160
<i>Е.И. Яковлев, Д.Т. Чекмарев, В.Ю. Епифанов.</i> Применения топологии в одной численной схеме решения задач механики сплошных сред.	164

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

Теорема 3. *Компактные псевдо-римановы пространства, которые не являются Эйнштейновыми, тензор Риччи которых образует положительно (или отрицательно) определенную форму, не допускают конформные отображения на пространства Эйнштейна.*

The paper was supported by the grant IGA Faculty of Science 2017012 Mathematical Structures of the Palacky University and the project No. LO1408, AdMas UP—Advanced Materials, Structures and Technologies (supported by the Ministry of Education, Youth and Sports under the National Sustainability Programme I), Brno University of Technology.

Литература

1. Петров А. З. *Новые методы в теории относительности*. – М.: Наука, 1965. – 495с.
2. Mikeš J., et al. *Differential geometry of special mappings*. – Olomouc: Palacky Univ. Press, 2015. – 566p.
3. Микеш Й., Гаврильченко М. Л., Гладышева Е. И. *О конформных отображениях на пространства Эйнштейна*. // Вестник Моск. ун-та. – 1994. – № 3. – С. 13–17.
4. Евтушик Л. Е., Гинтерлейтнер И., Гусева Н. И., Микеш Й. *Конформных отображения на пространства Эйнштейна*. // Изв. вузов. Матем. – 2016. – № 10. – С. 8–13.
5. Yano K., Bochner S. *Curvature and Betti numbers*. – Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1953. – 190p.

CONFORMAL MAPPINGS ONTO COMPACT EINSTEIN SPACES

I. Hinterleitner, N.I. Guseva, J. Mikeš

We formulate certain results of conformal mappings of compact pseudo-Riemannian spaces onto Einstein spaces.

Keywords: Conformal mappings, Einstein spaces, compact spaces.

УДК 514.762; 514.82

О ПРИЧИННОЙ СТРУКТУРЕ РАССЛОЕННЫХ ЛОРЕНЦЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Т.А. Гончар¹, Е.И. Яковлев²

¹ *gonchar.t.a@yandex.ru*; Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Институт информационных технологий, математики и механики

² *evgeniy.yakovlev@itmm.unn.ru*; Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Институт информационных технологий, математики и механики

Исследуется главное расслоение с заданной на его тотальном пространстве лоренцевой метрикой, инвариантной относительно действия структурной группы. Эта конструкция индуцирует лоренцеву геометрию на базе расслоения. Получены некоторые связи между причинными свойствами указанных лоренцевых многообразий.

Ключевые слова: Главное расслоение, G-связность, лоренцево многообразие, причинность.

Пусть $\xi = (E, p, B, G)$ — гладкое главное расслоение с проекцией $p : E \rightarrow B$ и структурной группой G , $\dim B = n$, $\dim G = k$, $\dim E = m = n + k$. Предположим, что на

многообразии E задана лоренцева метрика g , инвариантная относительно действия группы G на E . Предположим, что слои расслоения ξ пространственноподобны относительно g .

Обозначим символом V_ν вертикальное подпространство касательного пространства $T_\nu E$, состоящее из векторов, касающихся слоя $G_\nu = p^{-1}(b)$, $b = p(\nu)$. При этом ортогональное дополнение H_ν к подпространству V_ν в псевдоевклидовом пространстве $(T_\nu E, g_\nu)$ имеет размерность k . Соответствие $H : \nu \rightarrow H_\nu$ является G -связностью на E . Пусть ω — форма связности H .

Рассмотрим точку $b \in B$ и касательные векторы $X, Y \in T_b B$. Для произвольной точки $\nu \in p^{-1}(b)$ и горизонтальных лифтов X_ν^*, Y_ν^* векторов X, Y в точку ν относительно H положим

$$h(X, Y) = g(X_\nu^*, Y_\nu^*).$$

Этим определена лоренцева метрика h на многообразии B .

Рассмотрим алгебру Ли \mathfrak{g} группы G . Если $P, Q \in \mathfrak{g}$, то им соответствуют фундаментальные векторные поля P^*, Q^* на E . Для произвольной точки $\nu \in E$ положим $\gamma_\nu(P, Q) = g(P_\nu^*, Q_\nu^*)$. Очевидно, что γ_ν — евклидова метрика на алгебре \mathfrak{g} . При этом для всех $a \in G$ имеет место равенство $\gamma_{\nu \cdot a}(P, Q) = \gamma_\nu(\text{ad}(a)P, \text{ad}(a)Q)$.

Для произвольных $\bar{X}, \bar{Y} \in T_\nu E$

$$g(\bar{X}, \bar{Y}) = \gamma_\nu(\omega(\bar{X}), \omega(\bar{Y})) + p^* h(\bar{X}, \bar{Y}).$$

Евклидова метрика на алгебре \mathfrak{g} определяет левоинвариантную риманову метрику на группе G . Соответствие между ними взаимно однозначно, поэтому их обычно отождествляют. Поэтому γ_ν одновременно обозначает как евклидову метрику на \mathfrak{g} , так и соответствующую ей левоинвариантную риманову метрику на G .

Рассмотрим произвольный кусочно гладкий путь $\bar{x} : I \rightarrow E$, $I = [0, 1]$. Положим $x = p \circ \bar{x}$ и обозначим символом x^* горизонтальный лифт пути x относительно связности H . Так как $p \circ \bar{x} = p \circ x^*$, то найдется кусочно гладкий путь $z : I \rightarrow G$, удовлетворяющий равенству $\bar{x}(t) = x^*(t) \cdot z(t)$ для всех $t \in I$. Такое представление будем называть горизонтально-вертикальным разложением пути \bar{x} .

Предположим, что O — временная ориентация лоренцева многообразия (B, h) , то есть непрерывное времениподобное векторное поле на B , а O^* — горизонтальный лифт поля O относительно G -связности H . Тогда векторное поле O^* также непрерывно. Будем считать, что многообразии (E, g) ориентированно во времени векторным полем O^* .

Нашей целью является установление связи между причинными структурами многообразий (E, g) и (B, h) . В случае, когда группа G абелева, некоторые результаты в этом направлении были получены в работах [1], [2] и [3]. Они были использованы в двухточечных краевых задачах для гироскопических систем с многозначным функционалом действия, в том числе, для исследования динамики заряженных частиц в гравитационных и электромагнитных полях черных дыр. Здесь предполагается, что G — произвольная связная группа Ли.

Предложение 1. *Рассмотрим кусочно гладкий путь $\bar{x} : I \rightarrow E$, его проекцию $x = p \circ \bar{x}$ и горизонтально-вертикальное разложение $\bar{x} = x^* \cdot z$ относительно G -связности H . Путь \bar{x} непространственноподобен (времениподобен) тогда и только тогда, когда*

непространственноподобен (временноподобен) путь x и $\gamma_{\bar{x}(t)}(dz/dt, dz/dt) \leq |dx/dt|_h$ ($\gamma_{\bar{x}(t)}(dz/dt, dz/dt) < |dx/dt|_h$) для всех $t \in I$.

Лоренцево многообразие принято называть причинным (хронологическим), если оно не содержит замкнутых непространственноподобных (временноподобных) кривых. Из предложения 1 немедленно следует

Предложение 2. Если базовое лоренцево многообразие (B, h) является причинным (хронологическим), то и расслоенное лоренцево многообразие (E, g) будет причинным (хронологическим).

Открытое подмножество U лоренцева многообразия считается причинно выпуклым, если произвольная непространственноподобная кривая данного многообразия либо не имеет с U общих точек, либо пересекается с ним по связному множеству. Лоренцево многообразие называется сильно причинным, если каждая его точка имеет базу окрестностей, каждая из которых является причинно выпуклым множеством. Это свойство равносильно тому, что топология многообразия совпадает с топологией Александра, базу которой образуют множества вида $I^+(u) \cap I^-(v)$, где $I^+(u)$ – хронологическое будущее точки u , а $I^-(v)$ – хронологическое прошлое точки v [4].

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. Пусть лоренцево многообразие (B, h) сильно причинно и структурная группа G компактна. Тогда расслоенное лоренцево многообразие (E, g) также является сильно причинным.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 16-01-00312а).

Литература

1. Яковлев Е. И. Двухточечные краевые задачи в релятивистской динамике // – Матем. заметки – 1996. –Т. 59. –№3. –С. 437–449.
2. Яковлев Е. И. О существовании решений двухточечных краевых задач для гироскопических систем релятивистского типа // Алгебра и анализ –1997. –Т. 9 –№ 2 –С. 256–271.
3. Яковлев Е. И. Расслоения и геометрические структуры, ассоциированные с гироскопическими системами // Современная математика. Фундаментальные направления –2007. –Т. 22. –С. 100–126.
4. Эрлих Б. Д. Глобальная лоренцева геометрия –М.: Мир, 1985. –400 с.

ABOUT CAUSAL STRUCTURE OF BUNDLED LORENTZIAN MANIFOLDS

T.A. Gonchar, E.I. Yakovlev

A principal G -bundle with G -invariant spacetime metric on its total space is investigated. This construction induces the Lorentzian geometry on the base of the bundle. Some links between the causal properties of these Lorentz manifolds are obtained.

Keywords: Principal bundle, G -connection, Lorentzian manifold, Causality.

Научное издание

**МЕЖДУНАРОДНАЯ МОЛОДЕЖНАЯ ШКОЛА-СЕМИНАР
«СОВРЕМЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ»**

**МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
«СОВРЕМЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ И Е ПРИЛОЖЕНИЯ»**

Сборник трудов

Казань, 27 ноября – 3 декабря 2017 г.

Разработка авторского LaTeX-стиля оформления - **А.А. Агафонов**

Техническая редакция, набор и верстка:
А.А. Агафонов, А.А. Попов, П.И. Трошин, К.А. Митничук, Е.Н. Сосов, П.Н. Иваньшин

Оформление обложки: **А.А. Агафонов, Р.Ф. Мифтахов**

В сборнике трудов опубликованы 58 статей, посвященных современным проблемам геометрии и ее приложений.

Подписано в печать 20.11.2017
Бумага офсетная. Печать цифровая.
Формат 60×84 1/16. Усл.печ. л. 10.
Тираж 250 экз. Заказ 246/11

отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии Издательства Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужи́на, 1/37
тел: (843) 233-73-59, 233-73-28