

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИЯМИ В ЗАКРЫТОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТРЕХСЕКТОРНОЙ ЭКОНОМИКИ

П. В. Шнурков¹, В. В. Засыпко², В. В. Белоусов³, А. К. Горшенин⁴

Аннотация: Настоящее исследование посвящено разработке численного метода решения задачи оптимального управления инвестициями в закрытой динамической модели трехсекторной экономики. В предшествующих работах было проведено аналитическое исследование поставленной задачи оптимального управления на основе принципа максимума. В данной работе полученные аналитические представления для функций состояний и сопряженных переменных используются как основа для численного алгоритма. Предлагаемый алгоритм позволяет проанализировать класс допустимых функций управления, имеющих не более заданного конечного числа точек переключения, и найти среди них те, которые удовлетворяют необходимым условиям экстремума и ограничениям исходной задачи. Общая схема предложенного алгоритма может быть использована и при решении других задач оптимального управления, связанных с различными предметными областями. В ходе проведенного исследования разработанный алгоритм реализован в комплексе прикладных программ.

Ключевые слова: модель трехсекторной экономики; принцип максимума Понтрягина; численное решение задачи оптимального управления

DOI: 10.14357/19922264160108

1 Введение

В работах Шнуркова и Засыпко [1, 2] была поставлена и исследована задача оптимального управления инвестициями, сформулированная на основе закрытой динамической модели трехсекторной экономики. По форме поставленная задача представляет собой классическую задачу оптимального управления на заданном конечном интервале времени с закрепленным левым концом траектории. Теоретическое исследование задачи производилось на основе принципа максимума Понтрягина.

Исследованию задач оптимального управления в экономических системах посвящена обширная литература. Отметим, например, фундаментальные издания [3–5]. Работы, в которых исследуются многосекторные экономические модели, встречаются достаточно редко [6]. Данное обстоятельство определяет актуальность проведенного исследования.

Следует отметить, что метод исследования задач оптимального управления, основанный на использовании принципа максимума, позволяет получить аналитические решения только для сравнительно

небольшого числа задач, и такие решения хорошо известны в научной и учебной литературе [7, 8]. Для остальных задач принцип максимума позволяет только определить структуру, т. е. аналитическое устройство функций оптимального управления.

Для продолжения исследования требуется решение весьма сложной системы соотношений, состоящей из необходимых условий экстремума и ограничений исходной задачи. Именно такая ситуация возникает и при решении рассматриваемой задачи.

Дальнейшее аналитическое исследование проводилось для функций управления, удовлетворяющих условию максимума и при этом имеющих произвольное конечное число переключений. Для таких функций выписаны аналитические решения системы сопряженных уравнений и системы уравнений дифференциальной связи. В результате получены явные представления для сопряженных переменных, которые по содержанию являются множителями Лагранжа в рассматриваемой экстремальной задаче, и функций удельного капитала в различных секторах, которые играют роль состояний в этой задаче [2]. Однако на этом анали-

¹НИУ Высшая школа экономики, pshnurkov@hse.ru

²НИУ Высшая школа экономики, vzasypko@gmail.com

³Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, vbousov@ipiran.ru

⁴Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук; Московский технологический университет (МИРЭА), a.k.gorshenin@gmail.com

тические средства исследования исчерпывают свои возможности. Дальнейшее исследование поставленной задачи оптимального управления возможно только при помощи численных методов.

В работе [2] была кратко описана общая схема алгоритма, позволяющего завершить исследование поставленной задачи численно. Для заданного набора исходных данных (параметров модели) этот алгоритм позволяет определить конкретную функцию управления и соответствующий набор функций состояний, которые удовлетворяют системе соотношений, состоящей из необходимых условий и ограничений исходной задачи, т. е. является допустимой экстремалью.

В настоящей работе результаты проведенного исследования представлены в целом. При этом основное внимание уделяется описанию и реализации указанного численного алгоритма. Приводится математическая постановка задачи оптимального управления. Формулируется утверждение о необходимых условиях экстремума в форме принципа максимума. Условие максимума позволяет определить структуру оптимального управления. Приводятся формулировки отдельных теорем об аналитических представлениях функций состояний и сопряженных переменных. Вычисление значений этих функций по найденным аналитическим формулам используется в ходе реализации основного алгоритма.

Разработанный алгоритм реализован в виде комплекса прикладных программ. В данной работе приведено описание структуры этого комплекса и его отдельных составляющих. Дано также описание исходных данных, для которых произведены численные исследования. Результатом такого исследования является конкретный управляемый процесс, удовлетворяющий необходимым условиям и ограничениям поставленной задачи.

2 Математическая постановка задачи оптимального управления

Рассматриваемая задача оптимального управления формулируется на основе трехсекторной модели экономики. Трехсекторная модель предложена В. А. Колемаевым [9, 10]. Дополнительные предположения, внесенные в данную модель, изложены в работе [1]. Измененную версию основной модели можно условно называть трехсекторной инвестиционной динамической моделью макроэкономической системы (национальной экономики). В исходной задаче оптимального управления [1]

состояние системы описывается трехмерным вектором, компонентами которого являются функции фондовооруженности (удельного капитала) в каждом из секторов. Параметром управления служит скалярная функция, представляющая собой долю инвестиций в первый (фондосоздающий) сектор по отношению к общему объему инвестиций в системе.

Математическая постановка задачи управления имеет следующий вид.

1. Целевой функционал смешанного типа с интегральной и терминальной частями:

$$\int_0^T e^{-\delta t} A_2 \theta_2 k_2^{\alpha_2}(t) dt + e^{-\delta T} \psi(k_0(T), k_1(T), k_2(T)) \longrightarrow \max. \quad (1)$$

2. Дифференциальная связь:

$$\left. \begin{aligned} \dot{k}_0 &= -\lambda_0 k_0 + l_0^{(1)} \rho A_1 k_1^{\alpha_1} (1 - u_1); \\ \dot{k}_1 &= -\lambda_1 k_1 + A_1 k_1^{\alpha_1} u_1; \\ \dot{k}_2 &= -\lambda_2 k_2 + l_2^{(1)} (1 - \rho) A_1 k_1^{\alpha_1} (1 - u_1). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

3. Начальные условия на основные параметры (состояния системы):

$$k_0(0) = k_{0,0}, \quad k_1(0) = k_{1,0}, \quad k_2(0) = k_{2,0}. \quad (3)$$

4. Ограничения на допустимое управление:

$$0 \leq u_1(t) \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4)$$

Приведем описание исходных параметров и основных характеристик модели, входящих в указанную постановку задачи. Отметим, что во введенных обозначениях нижний индекс j соответствует номеру сектора рассматриваемой экономической системы, $j = 0, 1, 2$.

K_j — объем основных производственных фондов (капитал) в j -м секторе.

L_j — число занятых (объем трудовых ресурсов) в j -м секторе.

I_j — объем инвестиций в j -й сектор.

$k_j = K_j/L_j$ — фондовооруженность j -го сектора экономики (удельный капитал).

$i_j = I_j/L_j$ — удельные инвестиции в j -й сектор экономики.

Указанные выше характеристики являются функциями от времени.

ν — доля прироста единицы объема трудовых ресурсов за единицу времени во всей экономической системе.

μ_j — доля выбывших за единицу времени основных производственных фондов в j -м секторе экономики.

Заметим, что в рассматриваемой модели выполняются следующие соотношения:

$L_j = L_{j,0}e^{\nu t}$, $L_{j,0}$ — объем трудовых ресурсов в j -м секторе в начальный момент времени.

$f_j(k_j) = A_j k_j^{\alpha_j}$ — объем произведенного продукта на одну единицу трудовых ресурсов (производительность труда) в j -м секторе.

A_j — нормирующий коэффициент $A_j > 0$.

α_j — коэффициент эластичности $0 < \alpha_j < 1$.

Параметры ν , μ_j , $L_{j,0}$, A_j и α_j , $j = 0, 1, 2$, предполагаются заданными.

Введем дополнительные обозначения:

$$\lambda_j = \mu_j + \nu, \quad j = 0, 1, 2;$$

$$\theta_j = \frac{L_j}{L} = \frac{L_j}{L_0 + L_1 + L_2} = \frac{L_{j,0}}{L_{0,0} + L_{1,0} + L_{2,0}},$$

$$j = 0, 1, 2;$$

$$l_0^{(1)} = \frac{L_{1,0}}{L_{0,0}}; \quad l_2^{(1)} = \frac{L_{1,0}}{L_{2,0}}; \quad B_2 = A_2 \theta_2.$$

Функция

$$u_1(t) = \frac{I_1(t)}{I_0(t) + I_1(t) + I_2(t)} = \frac{i_1(t)}{A_1 k_1^{\alpha_1}(t)}$$

играет в данной модели роль параметра управления.

Постоянная величина $0 \leq \rho \leq 1$ определяет распределение инвестиций между нулевым (материальным) и вторым (потребительским) секторами после задания параметра управления, который, как уже отмечалось, определяет долю инвестиций, направляемых в первый (фондосоздающий) сектор. Эта величина предполагается заданной.

Постоянная величина $\delta > 0$ называется коэффициентом дисконтирования и также предполагается известной. Данная величина характеризует темп инфляции в рассматриваемой экономической системе.

С формальной точки зрения задача оптимизации (1)–(4) представляет собой классическую задачу оптимального управления с фиксированным интервалом времени, закрепленным левым и свободным правым концом траектории [1, 2]. Экономическое содержание этой задачи описано в работе [1]. Напомним его вкратце. Целевой функционал (1) состоит из интегральной и терминальной составляющих. Интегральная часть

представляет собой накопленный объем удельного производства (производительность труда) потребительского сектора, т. е. накопленный удельный объем потребительских благ. Терминальная часть характеризует уровень производства во всей системе в конечный момент времени T и зависит от значений удельного капитала в различных секторах. Система соотношений (2) или дифференциальная связь описывает изменение состояний системы $k_0(t)$, $k_1(t)$, $k_2(t)$ при заданной функции управления $u_1(t)$. Данная система непосредственно выводится из исходных динамических соотношений, характеризующих трехсекторную модель экономической системы. Соотношения (3), или начальные условия, означают, что заданы фиксированные значения функций состояний в начальный момент времени $t = 0$. Соотношение (4) представляет собой ограничение на управление, связанное с экономическим содержанием функции $u_1(t)$.

3 Необходимые условия экстремума и их теоретический анализ

Приведем в краткой форме результаты анализа задачи (1)–(4) методом, основанным на принципе максимума Понтрягина [7, 8, 11]. Основным теоретическим утверждением является утверждение о необходимых условиях экстремума в поставленной задаче, доказанное в работе [1]. В данной работе это утверждение приводится в новой форме.

Теорема 1. Пусть $(k_{0*}(t), k_{1*}(t), k_{2*}(t); u_{1*}(t))$ — оптимальный управляемый процесс, т. е. решение задачи оптимального управления (1)–(4). Тогда найдутся не равные нулю одновременно множители Лагранжа $\lambda_0^* \in R$, $(p_0(t), p_1(t), p_2(t))$, $t \in [0, T]$, такие что выполняются следующие соотношения:

1. Сопряженные уравнения (система дифференциальных уравнений относительно функций $(p_0(t), p_1(t), p_2(t))$), которые в теории называются сопряженными переменными [7, 8, 11]:

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_0(t) &= \lambda_0 p_0(t); \\ \dot{p}_1(t) &= \lambda_1 p_1(t) - A_1 \alpha_1 k_1^{\alpha_1 - 1}(t) \left[l_0^{(1)} \rho p_0(t) + \right. \\ &\quad \left. + l_2^{(1)} (1 - \rho) p_2(t) \right] (1 - u_1(t)) - \\ &\quad - A_1 \alpha_1 k_1^{\alpha_1 - 1}(t) u_1(t); \\ \dot{p}_2(t) &= \lambda_2 p_2(t) - B_2 e^{-\delta t} \alpha_2 k_2^{\alpha_2 - 1}(t) \end{aligned} \right\} (5)$$

$$\text{при } k_0(t) = k_{0*}(t), \quad k_1(t) = k_{1*}(t), \quad k_2(t) = k_{2*}(t) \\ \text{и } u_1(t) = u_{1*}(t).$$

2. Условия трансверсальности (система граничных условий к сопряженным уравнениям в точке $t = T$):

$$\left. \begin{aligned} p_0(T) &= e^{-\delta T} \psi_{k_0^{(1)}}(k_0(T), k_1(T), k_2(T)) = \\ &= \psi_0^{(0)}(T); \\ p_1(T) &= e^{-\delta T} \psi_{k_1^{(1)}}(k_0(T), k_1(T), k_2(T)) = \\ &= \psi_1^{(0)}(T); \\ p_2(T) &= e^{-\delta T} \psi_{k_2^{(1)}}(k_0(T), k_1(T), k_2(T)) = \\ &= \psi_2^{(0)}(T) \end{aligned} \right\} (6)$$

при $k_0(t) = k_{0*}(t)$, $k_1(t) = k_{1*}(t)$ и $k_2(t) = k_{2*}(t)$.

3. Условие максимума функции Понтрягина:

$$\begin{aligned} \max_{u_1 \in U} H(t, k_0, k_1, k_2; u_1, p_0, p_1, p_2) &= \\ &= \max_{u_1 \in U} \left[-[\lambda_0 k_0 p_0 + \lambda_1 k_1 p_1 + \lambda_2 k_2 p_2] + \right. \\ &+ B_2 e^{-\delta t} k_2^{\alpha_2} + A_1 k_1^{\alpha_1} [l_0^{(1)} \rho p_0 + l_0^{(2)} (1 - \rho) p_2] + \\ &\left. + A_1 k_1^{\alpha_1} [-l_0^{(1)} \rho p_0 + p_1 - l_0^{(2)} (1 - \rho) p_2] u_1 \right] = \\ &= H(t, k_0, k_1, k_2; u_{1*}, p_0, p_1, p_2) \end{aligned} \quad (7)$$

при $k_0(t) = k_{0*}(t)$, $k_1(t) = k_{1*}(t)$, $k_2(t) = k_{2*}(t)$ и $u_1(t) = u_{1*}(t)$, где $U = \{u : 0 \leq u \leq 1\}$ — множество допустимых значений параметра управления $u_1 = u_1(t)$.

Теорема 1 и аналогичные утверждения в теории оптимального управления называются теоремами о необходимых условиях экстремума в форме принципа максимума или просто принципом максимума Понтрягина. В классических задачах управления эти условия состоят из сопряженных уравнений (5), граничных условий к сопряженным уравнениям вида (6), которые обычно называются условиями трансверсальности, а также из условия максимума некоторой специальной функции, называемой функцией Понтрягина или гамильтонианом (соотношение (7)).

Дальнейшее исследование заключается в анализе общей системы соотношений, состоящей из необходимых условий (5)–(7) и ограничений исходной задачи (2)–(4). Важную роль в этом анализе играет условие максимума функции Понтрягина.

Из условия максимума непосредственно следует, что структура функции оптимального управления $u_{1*}(t)$ зависит от значения некоторой вспомогательной функции $Q(p_0(t), p_1(t), p_2(t))$ в каждой точке $t \in [0, T]$ и может быть выражена следующей формулой:

$$u_{1*}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } Q(p_0(t), p_1(t), p_2(t)) > 0; \\ u_1^{(0)}(t), & \text{если } Q(p_0(t), p_1(t), p_2(t)) = 0; \\ 0, & \text{если } Q(p_0(t), p_1(t), p_2(t)) < 0, \end{cases} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q(p_0(t), p_1(t), p_2(t)) = \\ &= -l_0^{(1)} \rho p_0(t) + p_1(t) - l_0^{(2)} (1 - \rho) p_2(t). \end{aligned}$$

Данная функция называется функцией переключений в рассматриваемой задаче. В соотношении (8) через $u_1^{(0)}$ обозначено особое управление, возникающее при условии, когда $Q(p_0(t), p_1(t), p_2(t)) = 0$ и функция Понтрягина не зависит явно от параметра управления u_1 . Особое управление не определяется из условий максимума функции Понтрягина, и для его нахождения необходимо отдельное исследование. Аналитические представления для особых режимов управления удается определить в очень редких случаях. В связи с этим ограничимся только стандартным вариантом структуры управления без особого режима.

Функция $Q(p_0(t), p_1(t), p_2(t))$ является непрерывно дифференцируемой функцией от аргументов p_0 , p_1 и p_2 . В свою очередь, сопряженные переменные $p_0(t)$, $p_1(t)$ и $p_2(t)$ непрерывны и непрерывно дифференцируемы при всех значениях $t \in [0, T]$, кроме точек разрыва функции $u_1(t)$, определяющей значение управления. Однако, несмотря на эти хорошие аналитические свойства, поведение функции $Q(p_0(t), p_1(t), p_2(t))$ на конечном интервале $[0, T]$ может быть достаточно сложным. В частности, теоретически возможен вариант, когда эта функция бесконечное число раз меняет знак, что приведет к необходимости бесконечного числа переключений управления на данном конечном интервале времени. С точки зрения экономического содержания такое управление неоправданно и практически не реализуемо. В связи с этим в данной работе будет рассматриваться только вариант, когда функция $Q(p_0(t), p_1(t), p_2(t))$ лишь конечное число раз меняет знак на интервале времени $[0, T]$.

Будем предполагать, что точки, в которых функция $Q(p_0(t), p_1(t), p_2(t))$ изменяет знак, изолированы. Из соотношения (8) следует, что в указанных точках характер управления должен изменяться. В связи с этим такие точки на рассматриваемом интервале времени $[0, T]$ будем называть точками переключения управления. Обозначим точки переключения через $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{n-1} < \tau_n < T$, $\tau_0 = 0$, $\tau_{n+1} = T$. Аналитические представления решений систем сопряженных уравнений будут зависеть от того, является ли число переключений n четным или нечетным,

где значения $k_{i,\tau_{2j-2}}$, $i = 0, 1, 2$, определяются на интервале $[\tau_{2j-3}, \tau_{2j-2}]$ при $t = \tau_{2j-2}$, $j = 2, 3, \dots, m$, причем $k_{i,\tau_0} = k_{i,0}$, $i = 0, 1, 2$, при $j = 1$;

$$\left. \begin{aligned} k_0^{(2j-1)}(t) &= e^{-\lambda_0 t} \left(k_{0,\tau_{2j-1}} e^{\lambda_0 \tau_{2j-1}} + \right. \\ &+ \frac{l_0^{(1)} \rho A_1 k_{1,\tau_{2j-1}}^{\alpha_1} e^{\lambda_1 \alpha_1 \tau_{2j-1}}}{\lambda_0 - \lambda_1 \alpha_1} (e^{(\lambda_0 - \lambda_1 \alpha_1)t} - \\ &\quad \left. - e^{(\lambda_0 - \lambda_1 \alpha_1)\tau_{2j-1}}) \right); \\ k_1^{(2j-1)}(t) &= k_{1,\tau_{2j-1}} e^{-\lambda_1(t - \tau_{2j-1})}; \\ k_2^{(2j-1)}(t) &= e^{-\lambda_2 t} \left(k_{2,\tau_{2j-1}} e^{\lambda_2 \tau_{2j-1}} + \right. \\ &+ \frac{l_2^{(1)} (1 - \rho) A_1 k_{1,\tau_{2j-1}}^{\alpha_1} e^{\lambda_1 \alpha_1 \tau_{2j-1}}}{\lambda_2 - \lambda_1 \alpha_1} (e^{(\lambda_2 - \lambda_1 \alpha_1)t} - \\ &\quad \left. - e^{(\lambda_2 - \lambda_1 \alpha_1)\tau_{2j-1}}) \right), \tau_{2j-1} \leq t \leq \tau_{2j}, \end{aligned} \right\} (12)$$

где значения $k_{i,\tau_{2j-1}}$ определяются равенствами

$$k_{i,\tau_{2j-1}} = k_i^{(2j-2)}(\tau_{2j-1}), \quad i = 0, 1, 2, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Таким образом, формулы (11) и (12) полностью определяют аналитические представления для функций состояний в рассматриваемом варианте поведения функции переключений.

Явные аналитические представления для сопряженных переменных $p_0(t)$, $p_1(t)$ и $p_2(t)$ и функций состояний $k_0(t)$, $k_1(t)$ и $k_2(t)$ получены также и для трех остальных вариантов поведения функции переключений в случае, когда число переключений n является произвольным положительным числом $n \geq 1$. Отметим, что соответствующие представления для сопряженных переменных и функций состояний в случае отсутствия переключений $n = 0$ и в случае одного переключения $n = 1$ были приведены в работе [2].

Полученные результаты позволяют последовательно вычислить значения функций состояний $k_0(t)$, $k_1(t)$ и $k_2(t)$, а затем сопряженных переменных $p_0(t)$, $p_1(t)$ и $p_2(t)$ в любой точке $t \in [0, T]$. Но тогда и функция переключений $Q(p_0(t), p_1(t), p_2(t))$, определяемая через сопряженные переменные, также может быть вычислена в любой точке $t \in [0, T]$ для любого варианта функции управления $u_{1*}(t)$ без переключений или с произвольным конечным числом точек переключения.

5 Описание численного алгоритма решения задачи оптимального управления

Воспользовавшись обстоятельством, отмеченным в конце предыдущего раздела, можно предложить численный алгоритм определения функции управления $u_{1*}(t)$, удовлетворяющей необходимым условиям экстремума в форме принципа максимума. Идея этого алгоритма заключается в следующем.

Для каждого из рассмотренных вариантов структуры управления необходимо проанализировать поведение функции переключения $Q(t)$ на всем интервале времени $t \in [0, T]$. Такой анализ можно осуществлять численными методами компьютерных программ, вычисляющих значения функции $Q(t)$ в отдельных точках на интервале $t \in [0, T]$. При этом задается некоторое разбиение интервала $[0, T]$ конечным числом точек, в которых будут вычисляться значения функции переключений $Q(p_0(t), p_1(t), p_2(t))$. Программа, вычисляющая значения функции $Q(t)$, должна использовать подпрограммы, вычисляющие значения функций $p_0(t)$, $p_1(t)$ и $p_2(t)$. В свою очередь, подпрограммы, в результате выполнения которых вычисляются значения сопряженных переменных, должны реализовать аналитические представления этих функций, зависящих от функций состояний $k_0(t)$, $k_1(t)$ и $k_2(t)$, полученные в ходе проведенного исследования.

Если выявленное поведение функции переключения $Q(t)$ соответствует выбранной структуре функции управления $u_1(t)$, то рассматриваемый вариант функции управления и соответствующих функций состояний системы $k_0(t)$, $k_1(t)$ и $k_2(t)$ можно считать управляемым процессом, который удовлетворяет системе соотношений, состоящей из необходимых условий экстремума и ограничений исходной задачи. При этом соответствие функции переключений $Q(t)$ и выбранного варианта функции управления $u_1(t)$ понимается в смысле выполнения соотношения (8).

Перейдем теперь к последовательному описанию предлагаемого алгоритма нахождения допустимых экстремалей в исходной задаче оптимального управления.

1. Выберем в качестве начального варианта функции управления $u_1(t)$ один из вариантов с отсутствием переключений.
2. Для выбранного варианта вычислим значения функций $k_0(t)$, $k_1(t)$ и $k_2(t)$ по имеющимся ана-

литическим формулам (см. формулы (19) и (21) работы [2]).

3. Используя значения выбранной функции управления $u_{1*}(t)$ и найденные значения функций $k_0(t)$, $k_1(t)$ и $k_2(t)$ вычислим значения сопряженных функций $p_0(t)$, $p_1(t)$ и $p_2(t)$ по имеющимся аналитическим формулам (см. формулы (29) и (30) работы [2]).
4. Используя найденные значения сопряженных переменных $p_0(t)$, $p_1(t)$ и $p_2(t)$, определим численное представление функции переключений $Q(t) = Q(p_0(t), p_1(t), p_2(t))$.
5. Осуществим проверку соответствия характера вычисленной функции $Q(t)$ выбранному исходному варианту функции управления. В данном случае необходимо проверить выполнение одного из условий: либо условия $Q(t) > 0$, $t \in [0, T]$, если в п. 1 данной процедуры был выбран вариант управления $u_1(t) = 1$, $t \in [0, T]$, либо условия $Q(t) < 0$, $t \in [0, T]$, если в п. 1 данной процедуры был выбран вариант управления $u_1(t) = 0$, $t \in [0, T]$. Отметим, что указанные условия на функцию $Q(t)$ должны быть проверены для всех значений аргумента t , принадлежащих заданному изначально разбиению отрезка $[0, T]$.
6. Если указанное условие выполняется, то можно считать, что выбранный в п. 1 данной процедуры вариант функции управления удовлетворяет необходимым условиям экстремума в форме принципа максимума и ограничениям исходной задачи. Тогда управляемый процесс $(u_{1*}(t), k_0(t), k_1(t), k_2(t))$ представляет собой допустимую экстремаль в рассматриваемой задаче оптимального управления. Данный вариант управляемого процесса сохраним в специально отведенном месте памяти. Перейдем к следующему варианту функции управления.
7. Предположим теперь, что проверяемое условие не выполняется. Для определенности будем считать, что при выбранном варианте управления $u_1(t) = 1$, $t \in [0, T]$ функция $Q(t)$ меняет знак в некоторой точке τ : $Q(t) > 0$, $t \in [0, \tau)$, $Q(t) < 0$, $t \in (\tau, T]$. Такой результат означает, что при заданных исходных параметрах модели управляемый процесс, состоящий из функции $u_1(t)$ и соответствующих функций состояний $k_0(t)$, $k_1(t)$ и $k_2(t)$, не удовлетворяет системе соотношений, состоящей из необходимых условий экстремума и ограничений исходной задачи. Следует перейти к анализу другого варианта функции управления.

8. В качестве следующего варианта функции управления можно выбрать тот, который наиболее близок к результату, описанному в п. 7, а именно:

$$u_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq t \leq \tau; \\ 0 & \text{при } \tau \leq t \leq T. \end{cases} \quad (13)$$

В то же время такой выбор нельзя обосновать строго. Можно осуществить переход к любому из вариантов управления с одной точкой переключения вида (13), где τ — произвольная внутренняя точка из интервала $[0, T]$, совпадающая с одной из точек заданного разбиения отрезка $[0, T]$.

9. Для нового варианта управления вида (13) повторяются действия, описанные в пп. 2–4 данной процедуры.
10. Проверяется условие соответствия поведения вычисленной функции $Q(t)$ и выбранного варианта (13) функции управления.

Если поведение функции $Q(t)$ соответствует выбранному варианту функции управления, а именно: выполняется условие $Q(t) > 0$, $0 \leq t \leq \tau$, $Q(t) < 0$, $\tau < t \leq T$, $Q(\tau) = 0$, то можно утверждать что выбранный вариант функции управления $u_{1*}(t)$ вида (13) и соответствующие ему функции состояний $k_{0*}(t)$, $k_{1*}(t)$ и $k_{2*}(t)$ удовлетворяют системе, состоящей из необходимых условий экстремума и ограничений исходной задачи. Управляемый процесс $(u_{1*}(t); k_{0*}(t), k_{1*}(t), k_{2*}(t))$ является допустимой экстремалью в исходной задаче оптимального управления. Данный вариант управляемого процесса сохраняется в специально отведенном месте памяти, после чего происходит переход к анализу следующего варианта функции управления.

Если же поведение вычисленной функции $Q(t)$ не соответствует характеру выбранного варианта функции управления вида (13), то набор, состоящий из функций $u_1(t)$ и соответствующих ей функций состояний $k_0(t)$, $k_1(t)$ и $k_2(t)$, не удовлетворяет системе соотношений, состоящей из необходимых условий экстремума и ограничений исходной задачи. Данный набор не является допустимой экстремалью.

11. Производится переход к следующему варианту функции управления $u_1(t)$ из рассматриваемого множества функций управления. При этом прежде всего перебираются все варианты функции управления с одной точкой переключения вида (13), в которых точка τ пробегает заданное множество точек, составляющих разбиение отрезка $[0, T]$.

12. Для каждого нового варианта функции управления производятся аналогичные действия, описанные в пп. 2–4 данного алгоритма. После этого вновь проверяется соответствие поведения вычисленной функции $Q(t)$ выбранному варианту функции управления. Выводы, которые могут быть сделаны по результатам проверки такого соответствия, аналогичны выводам, сформулированным в пп. 6, 7 и 10 данного алгоритма.
13. Указанные действия производятся для всех вариантов функции управления, входящих в некоторое множество функций, заданных на отрезке $[0, T]$. Более подробно данное множество будет описано ниже. Сейчас отметим лишь, что это множество конечно и данный алгоритм будет реализован за конечное число шагов.

Иллюстрацией к описанному выше алгоритму нахождения допустимых экстремалей в исходной задаче оптимального управления может служить схема, изображенная на рис. 1.

Сделаем важное замечание, относящееся к п. 13 приведенного алгоритма. Из общей теории экстремальных задач известно, что может существовать несколько допустимых экстремалей, удовлетворяющих необходимым условиям экстремума и ограничениям исходной задачи. Таким образом, процедура поиска должна продолжаться с использованием целенаправленного перебора возможных вариантов поведения функции управления. Указанный перебор должен осуществляться при помощи изменения положения точек переключения и числа этих точек. Основываясь на общих особенностях функций оптимального управления, следующих из условия максимума и соотношения (8), а также на сделанных в дальнейшем дополнительных предположениях о характере возможных

управлений, можно предложить следующее описание основных аналитических особенностей множества возможных вариантов функции управления $u_1(t)$, на котором реализуется описанный алгоритм. Данный объект должен представлять собой множество функций, заданных на отрезке $[0, T]$, принимающих два возможных значения: 0 или 1 — и имеющих не более заданного конечного числа точек разрыва первого рода (скачков). Для определенности будем предполагать также, что эти функции являются непрерывными справа.

Проведем теперь формальное описание множества возможных функций управления, на котором действует предлагаемый алгоритм. Зафиксируем целое положительное число $N \geq 1$. Пусть $\Delta = T/(N + 1) > 0$. Обозначим через $t_i = i\Delta$, $i = 0, 1, 2, \dots, N, N + 1$, точки, принадлежащие отрезку $[0, T]$, $t_0 = 0$, $t_{N+1} = (N + 1)\Delta = T$. Совокупность точек $\{t_1, t_2, \dots, t_N\}$ будем называть разбиением отрезка $[0, T]$. В каждой реализации алгоритма параметры T и N , а следовательно, и все разбиение данного отрезка времени, должны быть заданы. Будем предполагать, что заданное разбиение $\{t_1, t_2, \dots, t_N\}$ представляет собой множество возможных точек переключения у рассматриваемых функций управления. При этом граничные точки данного отрезка $t_0 = 0$ и $t_{N+1} = T$ не считаются точками переключения.

Зафиксируем целое положительное число n , $1 \leq n \leq N$. Выберем n различных точек из разбиения $\{t_1, t_2, \dots, t_N\}$. Обозначим через $S_n^{(N)}$ множество возможных функций управления $u_1(t)$, обладающих следующими свойствами:

- (а) данные функции принимают только два возможных значения: 0 или 1;
- (б) данные функции являются кусочно-постоянными и меняют свое значение в точках

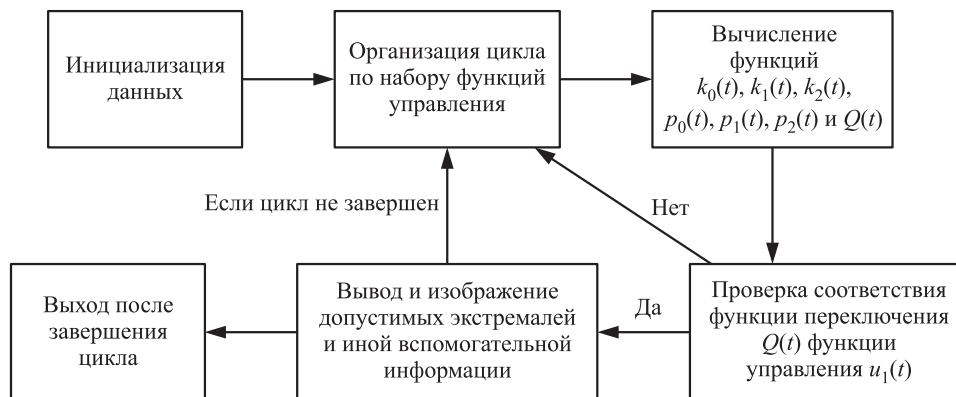


Рис. 1 Теоретическая схема реализации алгоритма

переключения. В точках переключения эти функции обладают свойством непрерывности справа;

- (в) точками переключения для функций, принадлежащих множеству $S_n^{(N)}$, может служить любой набор, состоящий из n различных точек, принадлежащих разбиению $\{t_1, t_2, \dots, t_N\}$.

Совокупность функций $S_n^{(N)}$, обладающих указанными свойствами, будет рассматриваться как набор возможных функций управления с n переключениями, где $1 \leq n \leq N$. Для удобства введем также множество $S_0 = S_0^{(N)}$, состоящее из двух функций: $u_1(t) = 0, 0 \leq t \leq T$, и $u_1(t) = 1, 0 \leq t \leq T$. Функции управления, входящие в множество $S_0^{(N)}$, не имеют переключений. Очевидно, что при $n_1 \neq n_2$ множества $S_{n_1}^{(N)}$ и $S_{n_2}^{(N)}$ являются непересекающимися.

Теперь рассмотрим объединение множеств

$$\hat{S}_n^{(N)} = \bigcup_{k=0}^n S_k^{(N)}.$$

По содержанию множество $\hat{S}_n^{(N)}$ представляет собой совокупность функций, обладающих свойствами (а) и (б), указанными выше, для которых точками переключения может служить любой набор, состоящий не более чем из n различных точек, принадлежащих множеству $\{t_1, t_2, \dots, t_N\}$. Именно такие наборы функций будут рассматриваться в данной алгоритмической части настоящего исследования как множества возможных функций управления. Для каждой реализации изложенного выше алгоритма задаются параметры N и n , т. е. шаг разбиения Δ и максимально возможное число точек переключения $n \leq N$.

Докажем утверждение о числе элементов множества $\hat{S}_n^{(N)}$.

Утверждение 1. Число элементов множества $\hat{S}_n^{(N)}$ определяется следующей формулой:

$$\hat{N}_n = 2 \sum_{k=0}^n C_N^k.$$

Доказательство. Определим число элементов в каждом из множеств, входящих в множество $\hat{S}_n^{(N)}$. Множество $S_0^{(N)}$ состоит из двух элементов. Рассмотрим множество $S_k^{(N)}$ с фиксированным номером k . Число возможных вариантов точек переключения для функций из данного множества совпадает с числом возможных вариантов выбора k различных элементов из N без возвращения и без учета порядка элементов. Указанное число вариантов переключения равно числу сочетаний

$C_N^k = N!/(k!(N-k)!)$. Каждому фиксированному набору точек переключения соответствуют два варианта возможного вида функции управления, которые отличаются значением функции на интервале от $t = 0$ до первой точки переключения. Таким образом, множество $S_k^{(N)}$ содержит $2C_N^k$ элементов. Поскольку множества $S_k^{(N)}$ не пересекаются при различных k , число элементов в объединении множеств равно сумме числа элементов в каждом множестве. Отсюда следует, что

$$\hat{N}_n = 2 + 2C_N^1 + 2C_N^2 + \dots + 2C_N^n = 2 \sum_{k=0}^n C_N^k.$$

Утверждение 1 доказано.

Доказанное утверждение позволяет точно определить число вариантов функции управления, которые необходимо исследовать в ходе реализации предложенного алгоритма. Если удастся каким-либо образом, например при помощи численного эксперимента, оценить время, необходимое для анализа каждого варианта, то полученная формула позволит оценить общее время работы программы, зависящее от параметров N и n .

6 Программная реализация алгоритма и результаты вычислений

Предложенный алгоритм численного решения задачи оптимального управления реализован в виде программного комплекса. Комплекс состоит из нескольких функциональных частей, которые можно назвать модулями. Перечислим эти модули в той последовательности, в которой происходит реализация всего алгоритма.

1. Модуль, непосредственно реализующий аналитические формулы для функций состояний $k_0(t)$, $k_1(t)$ и $k_2(t)$.
2. Модуль, непосредственно реализующий аналитические формулы для сопряженных переменных $p_0(t)$, $p_1(t)$ и $p_2(t)$. В этом модуле используются результаты вычислений по программным продуктам первого модуля.
3. Модуль, реализующий аналитическое представление для функции переключения $Q(t) = Q(p_0(t), p_1(t), p_2(t))$. В этом модуле используются результаты вычислений из модуля 1 и модуля 2.
4. Модуль, реализующий перебор некоторого заданного множества возможных функций управ-

ления и проверку соответствия каждого варианта функции управления характеру функции переключения, вычисляемой для этого варианта. В этом модуле используются результаты вычислений модуля 3.

В результате использования данного комплекса определяются все возможные варианты управляемых процессов, состоящих из некоторой функции управления $u_{1*}(t)$ и соответствующих ей функций состояний $(k_{0*}(t), k_{1*}(t), k_{2*}(t))$, которые удовлетворяют системе, состоящей из необходимых условий экстремума (5)–(7) и ограничений исходной задачи (2)–(4). Каждый из таких управляемых процессов $(u_{1*}(t); k_{0*}(t), k_{1*}(t), k_{2*}(t))$ представляет собой допустимую экстремаль для заданного набора исходных параметров математической модели.

Отметим еще одну важную особенность программного комплекса, реализующего разработанный алгоритм. Данная особенность связана с организацией выбора точек переключения и всей функции управления $u_{1*}(t)$. В программном комплексе предусмотрены три возможности такого выбора и вычисления функций состояний $(k_0(t), k_1(t), k_2(t))$, сопряженных переменных $(p_0(t), p_1(t), p_2(t))$ и функции переключений $Q(t) = Q(p_0(t), p_1(t), p_2(t))$, соответствующих выбранной функции управления:

1. Случайный выбор точек переключения (t_1, t_2, \dots, t_n) . При этом задается число $n \geq 1$ и значение функции управления на начальном интервале $[0, t_1]$. Такой выбор условно называется стохастическим моделированием. Полученные результаты могут быть использованы для качественного анализа исходной задачи управления.
2. Задание конкретного набора точек переключения (t_1, t_2, \dots, t_n) . При этом конкретный вид функции управления $u_1(t)$ определяется при помощи задания ее значения на начальном интервале времени $[0, t_1]$. Такая функция позволяет исследовать возможные варианты управляемых процессов по отдельности и изучать влияние отдельных параметров на вид управляемого процесса.
3. Организация непосредственного перебора возможных вариантов функций управления $u_1(t)$, входящих в определенный класс $S_k^{(N)}$, $k = 0, 1, \dots, n$. При этом должно быть задано число точек переключения k и значение функции управления $u_1(t)$ на начальном интервале времени $[0, t_1]$. Все наборы точек переключения функции управления, входящих в указанный класс, перебираются в ходе реализации

программы. Пользователю необходимо лишь ввести информацию о числе точек переключения, а также о значении функции управления на начальном интервале, которое может быть равно 0 или 1. В результате действия этой функции программного комплекса определяются все допустимые экстремали $u_{1*}(t)$, входящие в рассматриваемый класс $S_k^{(N)}$, и соответствующие им функции состояний $(k_{0*}(t), k_{1*}(t), k_{2*}(t))$. Данная функция предназначена для непосредственного численного решения поставленной задачи оптимального управления, т. е. нахождения всех допустимых экстремалей.

Теперь приведем краткое описание основного набора числовых значений исходных параметров рассматриваемой математической модели. Указанные числовые значения частично взяты из работы Колемаева [12], в которой они были определены на основе анализа реальных данных. Указанные значения определены на основе анализа данных о советской экономике за период с 1960 по 1991 гг. (в ценах 1983 г.). Для описания функционирования национальной экономики СССР за этот период использовалась трехсекторная модель и соответствующие значения параметров были определены для каждого сектора. В частности, в работе [12] было установлено, что численные значения параметров, входящих в функции $f_j(k_j) = A_j k_j^{\alpha_j}$, $j = 1, 2$, принимают следующие числовые значения:

$$A_1 = 1,35; \quad A_2 = 2,71; \quad \alpha_1 = 0,68; \quad \alpha_2 = 0,72.$$

Коэффициенты μ_j , $j = 0, 1, 2$, характеризующие скорость выбывания основных фондов в различных секторах, принимают следующие значения:

$$\mu_0 = 0,1; \quad \mu_1 = 0,3; \quad \mu_2 = 0,2.$$

Коэффициент ν характеризует скорость прироста объема трудовых ресурсов. Поскольку для различных национальных экономических систем такой параметр может быть очень различным, выберем условное расчетное значения для $\nu = 0,01$ исходя из предположения о достаточно медленном темпе прироста объема трудовых ресурсов.

Поскольку $\lambda_j = \mu_j + \nu$, $j = 0, 1, 2$, получаем:

$$\lambda_0 = 0,11; \quad \lambda_1 = 0,31; \quad \lambda_2 = 0,21.$$

Параметр $\delta > 0$, характеризующий скорость уменьшения реального содержания в единице денежных ресурсов (показатель инфляции), выберем равным $\delta = 0,06$, что соответствует среднему темпу инфляции.

Величина T — длительность интервала управления, которая иногда также называется горизонтом

планирования. Рассмотрим краткосрочный вариант, когда горизонт планирования представляет собой величину $T = 1$ условных единиц времени (лет).

В рассматриваемой модели величины θ_0, θ_1 и θ_2 представляют собой доли трудовых ресурсов j -го сектора в общем объеме трудовых ресурсов системы. Отметим, что в упомянутой работе В. А. Колмаева [12] эти параметры также были определены на основе данных об экономике СССР за 1960–1991 гг., а именно:

$$\theta_0 = 0,22; \quad \theta_1 = 0,16; \quad \theta_2 = 0,62.$$

Учитывая, что в рассматриваемой задаче параметры $l_0^{(1)}$ и $l_2^{(1)}$ выражаются через θ_0, θ_1 и θ_2 по формулам

$$l_0^{(1)} = \frac{L_{1,0}}{L_{0,0}} = \frac{\theta_1}{\theta_0}; \quad l_2^{(1)} = \frac{L_{1,0}}{L_{2,0}} = \frac{\theta_1}{\theta_2},$$

получаем

$$l_0^{(1)} = \frac{L_{1,0}}{L_{0,0}} = \frac{\theta_1}{\theta_0} = \frac{16}{22} = \frac{8}{11};$$

$$l_2^{(1)} = \frac{L_{1,0}}{L_{2,0}} = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{16}{62} = \frac{8}{31}.$$

Зададим теперь начальные значения функций фондовооруженности (удельного капитала):

$$k_{0,0} = 1000; \quad k_{1,0} = 2000; \quad k_{2,0} = 1500.$$

Предположим, что в рассматриваемой задаче терминальный член целевого функционала линейным образом зависит от значений удельного капитала $k_0(T), k_1(T), k_2(T)$:

$$\psi(k_0(T), k_1(T), k_2(T)) = a_0 k_0(T) + a_1 k_1(T) + a_2 k_2(T),$$

где a_0, a_1 и a_2 — заданные коэффициенты, характеризующие веса (вклады) величин $k_0(T), k_1(T)$ и $k_2(T)$ в терминальную часть целевого функционала. Данные величины могут быть определены экспертами-экономистами. В этом случае производные терминального члена целевого функционала имеют вид:

$$\psi_{k_0}(k_0(T), k_1(T), k_2(T)) = \psi_0^{(0)}(T) = a_0;$$

$$\psi_{k_1}(k_0(T), k_1(T), k_2(T)) = \psi_1^{(0)}(T) = a_1;$$

$$\psi_{k_2}(k_0(T), k_1(T), k_2(T)) = \psi_2^{(0)}(T) = a_2.$$

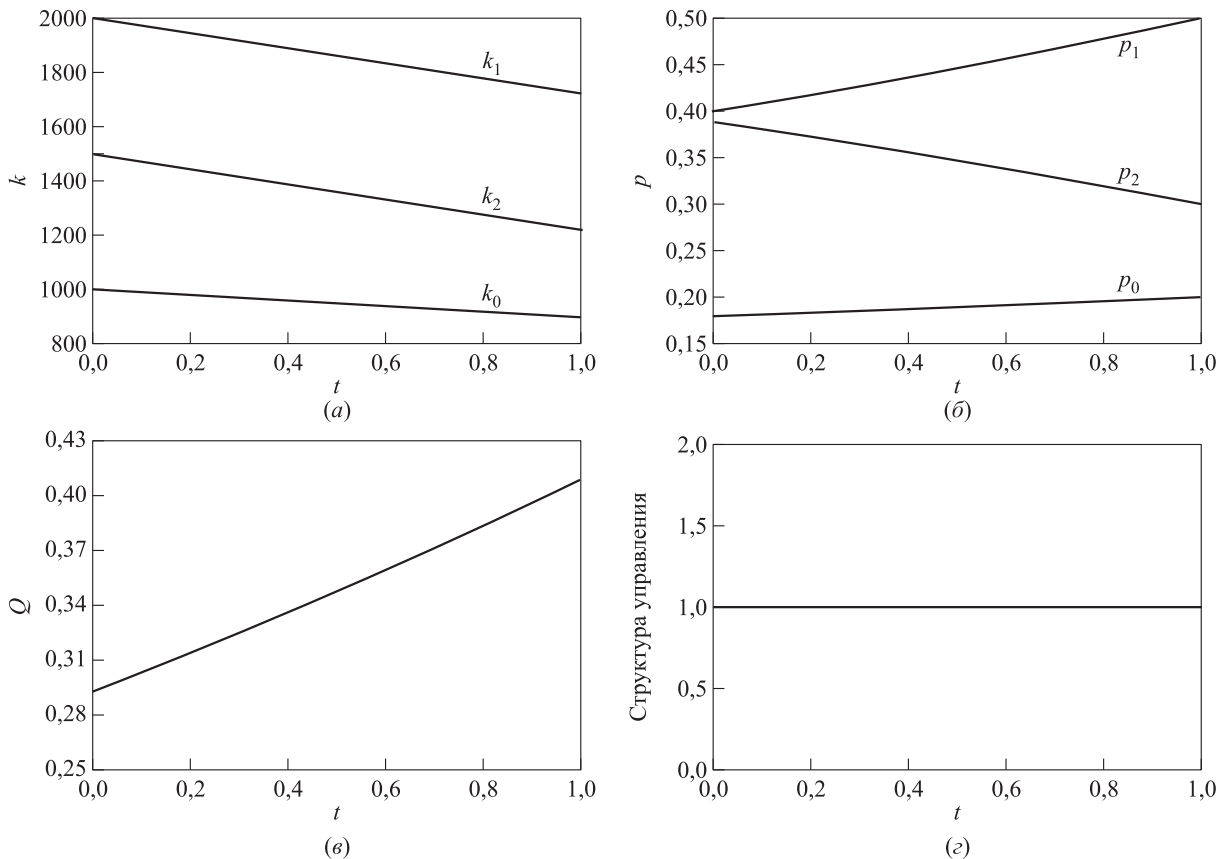


Рис. 2 Графическое представление функций фондовооруженности $k_i(t)$ (а), сопряженных переменных $p_i(t)$ (б), функции $Q(t)$ (в) и структура управления (г)

Величины a_0 , a_1 и a_2 определяют граничные условия для системы сопряженных уравнений относительно функций $p_0(t)$, $p_1(t)$ и $p_2(t)$ в точке $t\mathbf{H} = T$, т. е. условия трансверсальности. В рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} p_0(T) &= \psi_0^{(0)}(T) = a_0; \\ p_1(T) &= \psi_1^{(0)}(T) = a_1; \quad p_2(T) = \psi_2^{(0)}(T) = a_2. \end{aligned}$$

Зададим численные значения коэффициентов a_0 , a_1 и a_2 следующим образом:

$$a_0 = 0,2; \quad a_1 = 0,5; \quad a_2 = 0,3.$$

Наконец, зададим числовое значение величины ρ , характеризующей распределение инвестиций между материальным и потребительским секторами. Предположим, что $\rho = 0,2$. Таким образом, все необходимые значения параметров трехсекторной модели экономики заданы.

Разбиение отрезка времени $[0, T]$ задается параметром $N = 99$, откуда $\Delta = T/(N + 1) = 0,01$. Рассмотрено множество возможных функций управления $\hat{S}_3^{(N)}$, состоящее из управлений, имеющих не более трех точек переключения на заданном интервале времени. В результате установлено, что в данном множестве имеется единственная функция управления $u_{1*}(t) = 1$, $t \in [0, T]$, которая вместе с соответствующими ей функциями состояний $(k_{0*}(t), k_{1*}(t), k_{2*}(t))$ является решением системы соотношений, содержащей необходимые условия и ограничения исходной задачи. Графические представления для функции $u_{1*}(t)$, $t \in [0, T]$, а также соответствующих ей функций состояний $k_{0*}(t)$, $k_{1*}(t)$ и $k_{2*}(t)$, сопряженных переменных $p_0(t)$, $p_1(t)$ и $p_2(t)$ и функции переключений $Q(t) = Q(p_0(t), p_1(t), p_2(t))$ приведены на рис. 2.

Итак, для рассматриваемого набора численных значений исходных параметров в поставленной задаче оптимального управления имеется единственная допустимая экстремаль, задаваемая функциями $(u_{1*}(t); k_{0*}(t), k_{1*}(t), k_{2*}(t))$, изображенными на рис. 2, а. В этом управляемом процессе переключения отсутствуют.

Отметим, что аналогичные результаты были получены еще для нескольких вариантов набора значений исходных параметров, частично отличающихся от основного.

7 Заключительные замечания

Численный алгоритм, изложению и анализу которого посвящена данная работа, позволяет завершить решение поставленной задачи оптимального управления. В ходе реализации данного алгоритма

используются программы, вычисляющие значения функции состояний и сопряженных переменных. Алгоритм осуществляет перебор возможных вариантов функции управления и выбирает те из них, которые являются допустимыми экстремальми. Таким образом, решение исходной задачи оптимального управления находится при помощи сочетания аналитических и численных методов.

Предлагаемый алгоритм может быть использован не только в рассмотренной задаче оптимального управления. Его можно использовать при решении различных задач, которые имеют следующие общие свойства:

- исследование задачи производится на основе принципа максимума;
- структура оптимального управления определяется некоторой функцией переключений, зависящей от сопряженных переменных;
- система сопряженных уравнений может зависеть, вообще говоря, от функций состояний и управлений.

Такие общие свойства имеет весьма широкий класс задач оптимального управления, возникающих при анализе экономических и технических систем.

Литература

1. Шнурков П. В., Засыпко В. В. Оптимальное управление инвестициями в закрытой динамической модели трехсекторной экономики: математическая постановка задачи и общий анализ на основе принципа максимума // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки, 2014. Вып. 2. С. 101–115.
2. Шнурков П. В., Засыпко В. В. Аналитическое исследование задачи оптимального управления инвестициями в закрытой динамической модели трехсекторной экономики // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки, 2014. Вып. 4. С. 101–120.
3. *Intriligator M.* Математические методы оптимизации и экономическая теория / Пер. с англ. — М.: Айрис-Пресс, 2002. 553 с. (*Intriligator M. D.* Mathematical optimization and economic theory. — SIAM, 1971. 508 p.)
4. *Arrow A., Intriligator M. D., Hildenbrand W., Sonnenschein H.* Handbook of mathematical economics. — Amsterdam: North Holland, 1991. 750 p.
5. *Barro R., Sala-i-Martin X.* Economic growth. — Boston: MIT Press, 2003. 672 p.
6. *Ngai L. R., Pissarides C. A.* Structural change in a multi-sector model of growth. — London: Centre for Economic Policy Research, 2004. Discussion Paper No. 4763. 25 p.
7. *Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тухомиров В. М.* Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи. — М.: Физматлит, 2005. 256 с.

8. Арутюнов А. А., Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Принцип максимума Понтрягина. — М.: Факториал, 2006. 144 с.
9. Колемаев В. А. Трехсекторная модель экономики // Сб. науч. тр. Междунар. академии информатизации. — М.: Копия-Принт, 1997. С. 335–345.
10. Колемаев В. А. Математическая экономика. — М.: Юнити-Дана, 2002. 399 с.
11. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. — М.: Физматлит, 2007. 408 с.
12. Колемаев В. А. Оптимальный сбалансированный рост открытой трехсекторной экономики // Прикладная эконометрика, 2008. Вып. 3. С. 14–42.

Поступила в редакцию 08.11.15

DEVELOPMENT OF THE ALGORITHM OF NUMERICAL SOLUTION OF THE OPTIMAL INVESTMENT CONTROL PROBLEM IN THE CLOSED DYNAMICAL MODEL OF THREE-SECTOR ECONOMY

P. V. Shnurkov¹, V. V. Zasytko¹, V. V. Belousov^{2,3}, and A. K. Gorshenin^{2,3}

¹National Research University Higher School of Economics, 34 Tallinskaya Str., Moscow 123458, Russian Federation

²Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

³Federal State Budget Educational Institution of Higher Education “Moscow Technological University” (MIREA), 78 Vernadskogo Ave., Moscow 119454, Russian Federation

Abstract: The paper develops the numerical method of solution of the optimal investment control problem in the closed dynamical model of three-sector economy. The preceding papers described an analytical research of this problem by the method based on the Pontryagin maximum principle. In the present paper, the authors obtained analytical representations for state functions. Conjugate variables are used as the foundation of the numerical algorithm. The developed algorithm makes it possible to analyze the class of admissible control functions, having not more than the given finite number of points of switch, and to find among them those that satisfy the necessary optimality conditions and restrictions of the original task. The general scheme of the proposed algorithm can be used to investigate another optimal control tasks, connected with different subject areas. The developed algorithm is realized in a system of applied programs.

Keywords: model of three-sector economy; Pontryagin maximum principle; numerical method of solution of the optimal control problem

DOI: 10.14357/19922264160108

References

1. Shnurkov, P. V., and V. V. Zasytko. 2014. Optimal’noe upravlenie investitsiyami v zakrytoy dinamicheskoy modeli trekhsektornoy ekonomiki: Matematicheskaya postanovka zadachi i obshchiy analiz na osnove printsipa maksimuma [Optimal control of investments in the closed-form dynamic model of three-sector economy: Mathematical statement of the problem and general analysis based on the maximum principle]. *Vestnik MGTU im. N. E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Herarld of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural Sciences] 2:101–115.
2. Shnurkov, P. V., and V. V. Zasytko. 2014. Analiticheskoe issledovanie zadachi optimal’nogo upravleniya investitsiyami v zakrytoy dinamicheskoy modeli trekhsektornoy ekonomiki [Analytical study of optimal investments control problem in closed-form dynamic model of three-sector economics]. *Vestnik MGTU im. N. E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Herarld of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural Sciences] 4:101–120.
3. Intriligator, M. D. 1971. *Mathematical optimization and economic theory*. SIAM. 508 p.
4. Arrow, A., M. D. Intriligator, W. Hildenbrand, and H. Sonnenschein. 1991. *Handbook of mathematical economics*. Amsterdam: North Holland. 750 p.
5. Barro, R., and X. Sala-i-Martin. 2003. *Economic growth*. MIT Press. 672 p.

6. Ngai, L. R., and C. A. Pissarides. 2004. Structural change in a multi-sector model of growth. London: Centre for Economic Policy Research. Discussion Paper No. 4763. 25 p.
7. Alekseev, V. M., E. M. Galeev, and V. M. Tikhomirov. 2005. *Sbornik zadach po optimizatsii. Teoriya. Primery. Zadachi* [Collection of tasks on optimization. Theory. Examples. Tasks]. Moscow: Fizmatlit. 256 p.
8. Arutyunov, A. A., G. G. Magaril-II'yaev, and V. M. Tikhomirov. 2006. *Printsip maksimuma Pontryagina* [The Pontryagin maximum principle]. Moscow: Faktorial. 144 p.
9. Kolemaev, V. A. 1997. Trekhsektornaya model' ekonomiki [Three-sector model]. *Sb. nauch. tr. Mezhdunar. Akademii Informatizatsii* [International Academy of Informatization Proceedings]. Moscow: Kopya-Print. P. 335–345.
10. Kolemaev, V. A. 2002. *Matematicheskaya ekonomika* [Mathematical economics]. Moscow: Yuniti-Dana. 399 p.
11. Alekseev, V. M., V. M. Tikhomirov, and S. V. Fomin. 2007. *Optimal'noe upravlenie* [Optimal control]. Moscow: Fizmatlit. 408 p.
12. Kolemaev, V. A. 2008. Optimal'nyy sbalansirovanny rost otkrytoy trekhsektornoy ekonomiki [The optimal balanced growth of the open three-sector economy]. *Prikladnaya Ekonometrika* [Applied Econometrics] 3:14–42.

Received November 8, 2015

Contributors

Shnurkov Peter V. (b. 1953) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, associate professor, National Research University Higher School of Economics, 34 Tallinskaya Str., Moscow 123458, Russian Federation; pshnurkov@hse.ru

Zasytko Veronika V. (b. 1988) — PhD student, National Research University Higher School of Economics, 34 Tallinskaya Str., Moscow, 123458, Russian Federation; vzasypko@gmail.com

Belousov Vasilii V. (b. 1977) — Candidate of Science (PhD) in technology, Head of Laboratory, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; VBelousov@ipiran.ru

Gorshenin Andrey K. (b. 1986) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, senior scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; associate professor, Federal State Budget Educational Institution of Higher Education “Moscow Technological University” (MIREA), 78 Vernadskogo Ave., Moscow 119454, Russian Federation; agorshenin@ipiran.ru