



Правительство Российской Федерации
Государственное образовательное бюджетное учреждение
высшего профессионального образования
Государственный университет – Высшая школа экономики
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ

Программа дисциплины «Компьютерные вычисления»

Направление: 010100.62 «Математика»
Подготовка: Бакалавр
Форма обучения: Очная

Автор программы: доц. В.А. Тиморин

Рекомендована секцией УМС
факультета математики
Председатель

« _____ » _____ 2010 г.

Утверждена УС
факультета математики
Ученый секретарь доцент

_____ М.Бурман
« _____ » _____ 2010 г.

Одобрена на заседании
кафедры алгебры
Зав. кафедрой, проф.

_____ А.Н.Рудаков
« _____ » _____ 2010 г.



1. Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов направления 010100.62 «Математика» подготовки бакалавра.

Программа разработана в соответствии с:

Стандартом НИУ для направления 010100.62 «Математика» подготовки бакалавра;

Рабочим учебным планом университета по направлению 010100.62 «Математика» подготовки бакалавра, специализации Математика, утвержденным в 2010 г.

2. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Введение в дискретную математику» являются:

- Освоение экспериментального подхода к решению как математических задач, так и практических задач, связанных с математическими моделями.
- Владение основными принципами работы с системами компьютерной алгебры и языками программирования высокого уровня.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен:

- Освоить основные возможности системы Mathematica.
- Выполнять арифметические и алгебраические вычисления в системе Mathematica, а также вычисления со специальными функциями. Строить графики функций, экспериментально определять асимптотики последовательностей и функций. Знать методы визуализации математических и статистических данных.
- Уметь реализовывать вычислительные алгоритмы, изученные в курсе алгебры и анализа. Знать разложение многочленов на множители, вычисление дискриминантов и результатов, решение алгебраических уравнений в символическом виде и численно. Находить собственные векторы и собственные значения линейных операторов, приведение матриц к нормальным формам. Нахождение производных и интегралов в символьном виде, вычисление объемов и площадей поверхности.
- Знать основные структуры, встречающиеся в языках программирования высокого уровня – типы данных, списки, сортировка; выделять элементы списков, удовлетворяющих некоторым условиям; условия и циклы, модули, локальные переменные, область действия переменных.



Любая математическая компетенция достигается путем решения задач. На лекциях вводятся основные объекты, разбираются поучительные примеры, доказываются ключевые теоремы. Но этого совершенно недостаточно. Единственный путь к мастерству - самостоятельное решение задач.

В результате освоения дисциплины студент осваивает следующие компетенции:

Компетенция	Код по ФГОС/НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
умение формулировать результат	ПК-3	Правильно воспроизводит чужие результаты Правильно формулирует собственные результаты	Компетенция формируется в любом сегменте учебного процесса Формируется в процессе активных занятий компьютерными вычислениями (участие в семинарах, выполнение курсовых и дипломных работ).
умение строго доказать утверждение	ПК-4	Воспроизводит доказательства стандартных результатов, услышанных на лекциях Оценивает строгость любых текстов, связанных с компьютерными вычислениями	Изучение базового курса За счет повышения математической культуры в процессе обучения
умение грамотно пользоваться языком предметной области	ПК-7	Распознает и воспроизводит имена основных математических объектов, возникающих при изучении данного раздела Владеет и свободно использует профессиональную лексику	Продумывание и повторение услышанного на лекции. Беседы с носителями профессионального языка. Компетенция достигается в процессе накопления собственного опыта, общения с преподавателями.
понимание корректности постановок задач	ПК-10	Понимает постановки только опорных задач по компьютерным вычислениям	Продумывание базовых понятий курса Вырабатывается в процессе решения задач, самостоятельного чтения, работы над курсовыми заданиями



выделение главных смысловых аспектов в доказательствах	ПК-16	Понимает и воспроизводит основные моменты базовых доказательств и построений Обосновывает и оценивает логические ходы в произвольных рассуждениях и конструкциях	Продумывание ключевых моментов лекций Вырабатывается путем активного решения задач, самообразования, общения с преподавателями.
--	-------	---	--

4. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Для специализации математика настоящая дисциплина является базовой, относится к профессиональному циклу.

Для освоения учебной дисциплины от слушателей требуется владение алгеброй, геометрией, комбинаторикой, топологией и анализом в объеме первого курса – многие из пройденных понятий возникают в этом курсе в другом контексте и рассматриваются с другой точки зрения.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении базовых курсов 3, 4 года обучения по программе бакалавриата, направления 010100.62 «Математика».



Тематический план учебной дисциплины

№	Название темы	Всего часов по дисциплине	В том числе аудиторных			Самостоятельная работа
			Всего	Лекции	Практические занятия	
	1 модуль	108	40		40	68
1.	Арифметические операции, элементарные функции, графики, гамма-функция	7	2		2	7
2.	Определение переменных и функций, способы задания функций, интерактивность и визуализация при помощи манипулятора	7	4		4	5
3.	Упрощение алгебраических выражений, разложение многочленов на множители, выделение коэффициентов, производящие функции, элементарные дроби	8	3		3	7
4.	Дискриминанты и результаты. Решение алгебраических уравнений	7	2		2	7
5.	Линейная алгебра: операции над матрицами, нормальные формы, собственные векторы и собственные значения	7	4		4	5
6.	Анализ: дифференцирование и интегрирование функций, числовые ряды	7	2		2	7
7.	Ортогональные многочлены. Псевдослучайные величины.	7	2		2	5
8.	Символические выражения, структура выражений в системе Mathematica. Представление выражений в развернутой форме и в виде дерева.	11	5		5	8
9.	Правила подстановок. Работа с любыми символическими выражениями как со списками. Выделение частей у символических выражений.	11	5		5	8
10.	Списки. Задание списков. Элементы и части списков. Сортировка, выделение элементов списков, удовлетворяющих некоторым условиям.	11	3		3	8
11.	Условия и циклы. Булев тип данных. Логические операции. Команды выхода из цикла. Рекурсия.	11	4		4	7
12.	Модули, локальные переменные, область действия переменных.	14	4		4	10
	Итого:	108	40		40	68





Учебные материалы

Учебные материалы в формате Mathematica 7 Notebook доступны на официальной странице курса <http://www.hse.ru/edu/courses/9438931.html>

Дополнительная литература

1. Воробьев Евгений. Компьютерный практикум по математике: Математический анализ. Линейная алгебра. – Учебное пособие. – Книжный дом Университет (КДУ), 2009.
2. Дьяконов Владимир. Mathematica 5/6/7: Полное руководство. – Изд-во "ДМК Пресс", 2009.



Формы контроля

Текущий контроль – 1 домашнее задание.

Итоговый контроль – зачёт (1 модуль).

Требования для получения зачета:

Зачет по курсу выставляется в том случае, если сдано более 50 процентов контрольных упражнений, домашнее задание, а также итоговый проект – программа, написанная в системе Mathematica (успешно выполненный проект является необходимым условием получения зачета).



Образцы заданий по различным формам контроля

Список упражнений, которые нужно сдать на занятиях

1. Проверьте формулу Лежандра для удвоения аргумента гамма – функции.
2. Наберите эту формулу (чтобы она выглядела так, как в книге).

Указание: читайте Help/ Documentation Center/ Notebooks and Documents/ Math Typesetting.

3. Нарисуйте график функции

$$f(x, y) = \sin(x + y) + \cos(xy)$$

4. Для натуральных значений n , составьте таблицу явных значений $\zeta(-n)$ для $n=1, \dots, 20$. Та же задача для $\zeta(2n)$.

5. Найдите (с точностью до 10 знаков после запятой) наименьшее число $y > 0$, такое что $\zeta(1/2 + yi) = 0$.

Указание: при помощи команды FindRoot, найдите корень модуля дзета-функции (в качестве начальной точки укажите 0.1).

6. У Вас в кармане 30 монет достоинством 1 рубль, 20 монет достоинством 2 рубля, 15 монет достоинством 5 рублей, и 10 бумажек достоинством 10 рублей. Булочка стоит 26 рублей. Сколькими способами Вы можете за нее расплатиться?

7. Нарисуйте график логарифма числа Бернулли B_{2k} в зависимости от натурального числа k .

Указание: читайте раздел Алгебра / Производящие функции в учебных материалах.

8. Среди многочленов вида $x^n + x + 1$, найдите неприводимые (над рациональными числами).

Указание: используйте функции Select и IrreduciblePolynomialQ.

9. Особенность "ласточкин хвост" возникает на поверхности, заданной в трехмерном пространстве с координатами a, b, c уравнением

$$\text{Discriminant}[a x^3 + b x^2 + c x + x^5, x] = 0$$

Нарисуйте эту поверхность так, чтобы особенность в начале координат была хорошо видна.

Указание: используйте команду ContourPlot3D с подходящим значением параметра MaxRecursion

10. Гаусс обнаружил, что правильный 17-угольник можно построить циркулем и линейкой. Алгебраически, это означает, что $\sin(\pi/17)$ представляется формулой, содержащей лишь квадратные радикалы. Выпишите эту формулу.



Указание: используйте команду ToRadicals.

11. Нарисуйте кривые уровня функции f^A , где $f(x,y)=\sin(x)+\sin(y)$, а A – данная матрица с целыми коэффициентами.

Указание: используйте команды ContourPlot, MatrixPower.

12. Рассмотрим матрицу

5 4 2 1

0 1 -1 -1

-1 -1 3 0

1 1 -1 2

Найдите ее характеристический и минимальный многочлены. Приведите ее к жордановой нормальной форме.

13. Найдите инвариантное распределение вероятностей для случайного блуждания на графе.

Указание. Воспользуйтесь функцией, определенной в учебных материалах Линейная алгебра / Собственные векторы и собственные значения / Цепи Маркова и случайные блуждания.

14. Найдите пятую производную функции $\sin(\cos(x))$.

15. Нарисуйте на одном графике линии уровня функции $\sin(x)+\cos(y)$ и ее градиент. Сделайте так, чтобы при изменении функции в программе пришлось бы менять только ее определение. Указание: воспользуйтесь командами Show, ContourPlot, VectorPlot.

16. Найдите длину эллипса с главными полуосями a , b . Указание: используйте Integrate с Assumptions $\rightarrow \{a > 0, b > 0, a < b\}$.

17. Найдите разложение котангенса в степенной ряд (до членов порядка 20).

18. Найдите разложение функции $e^{\sin(x)}$ в ряд Фурье (до членов порядка 5).

19. Посчитайте кривизну и кручение кривой, заданной параметрически формулами $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$. Указание: см. http://en.wikipedia.org/wiki/Torsion_of_curves

Там есть формула, по которой можно посчитать кручение пространственной кривой.

20. Вычислите неопределенный интеграл от $1/(\sin(x)+\cos(x))$.

21. Найдите (численно, с точностью до 4 знаков после запятой) площадь эллипсоида с главными полуосями 1, 2, 3. Указание: эллипсоид может быть запараметризован таким образом:



$$x = \cos(u) \cos(v)$$

$$y = 2 \sin(u) \cos(v)$$

$$z = 3 \sin(v).$$

22. Найдите производящие функции для многочленов Лежандра и для многочленов Чебышева. Указание: есть команда `GeneratingFunction`.

23. Найдите число нулей многочлена z^5+5z-1 в круге $x^2+y^2<1.2$, $z=x+iy$.

24. Вычислите производную неявной функции $y(x)$, заданной уравнением $\sin(xy)+y^3=0$.

Производную нужно выразить через x и y .

25. Пусть $f(n)$ - количество натуральных чисел $x<n$, таких, что числа x^2+1 простые. Определите функцию f .

26. Напишите функцию, представляющую четное натуральное число в виде суммы двух простых.

Проекты

Выпуклые оболочки

Создайте динамическую картинку, на которой будет изображаться выпуклая оболочка n точек. Каждую из этих точек можно будет двигать мышкой - картинка будет меняться в соответствии с движением точек в реальном времени. Возможность менять число n тоже должна быть (в соответствии с кнопкой или кареткой на манипуляторе).

Число нулей дзета-функции

Посчитайте число нулей дзета-функции в прямоугольнике $[0.25,0.75] \times [0,M]$ для некоторых больших значений M (например, для $M=10000$). Оцените, как растет это число с ростом M .

Какие из многообразий Шуберта гладкие?

Всякой перестановке соответствует алгебраическое многообразие - многообразие Шуберта. Некоторые многообразия Шуберта гладкие, а некоторые - нет. По перестановке можно достаточно легко понять, гладко соответствующее многообразие Шуберта или нет. Алгоритм такой. Рассмотрим перестановку p . Если последовательность $p(a)p(b)p(c)p(d)$ совпадает с последовательностью $dbca$ или с последовательностью $cdab$ для некоторых $a<b<c<d$, то соответствующее многообразие Шуберта негладкое (а иначе гладкое).

Найдите все перестановки из четырех и пяти элементов, такие, что соответствующие многообразия Шуберта негладкие. Посчитайте число негладких многообразий Шуберта для перестановок из шести элементов.

Абелевы группы

Конечно порожденную абелеву группу можно задать образующими и соотношениями. Пусть, например, есть 10 образующих и 5 соотношений. Тогда все соотношения можно записать в виде целочисленной матрицы 10 на 5. При помощи элементарных целочисленных операций над строками и столбцами этой матрицы, ее можно привести к диагональному виду, причем так, что



на диагонали будут стоять целые положительные числа, линейно упорядоченные отношением делимости. Эти числа (так называемые инвариантные множители) фигурируют в представлении нашей группы в виде прямой суммы циклических. Напишите программу, вычисляющую инвариантные множители для матриц 10 на 5.

Результант системы алгебраических уравнений

Напишите функцию, которая по переопределенной системе алгебраических уравнений (с наперед заданными коэффициентами) выдает ее результат, то есть алгебраическое условие на коэффициенты системы, при котором система имеет решение.

Пользуясь этой функцией, найдите результат трех коник (=плоских алгебраических кривых, заданных квадратичными уравнениями), то есть алгебраическое условие на коэффициенты этих коник, при котором они имеют общую точку.

Поверхности тора и кренделя

Нарисуйте поверхности тора и кренделя. Программа должна быть оформлена в виде манипулятора, позволяющего менять толщину и угол поворота.

Цепные дроби, $\zeta(3)$ и уравнение Пелля

Запрограммируйте манипулятор, который, в зависимости от целых чисел a, b и натурального числа n , выводил бы n первых элементов цепной дроби для числа

$$\frac{1}{\pi^a e^b \zeta(3)}.$$

Цепная дробь должна выводиться в традиционной записи, а не в виде списка. Кроме того, напишите функцию, которая, по натуральному числу d , выдавала бы какое-нибудь решение уравнения Пелля $x^2 - d y^2 = 1$ в целых числах (решение может быть получено при помощи цепных дробей, см. http://en.wikipedia.org/wiki/Pell_equation).

Бассейны притяжения для рациональных функций

Рассмотрим такое семейство квадратичных рациональных функций, зависящее от одного комплексного параметра

$$F_a(x) = \frac{a}{x^2 + 2x}$$

Точки ноль и бесконечность образуют суперпритягивающий цикл для итераций такой функции. Нарисуйте желтым и синим те точки, итерации которых стремятся к этому циклу (цвет зависит от четности шага, на котором точка близка к 0).

Аппроксимации Лагранжа и Паде

Пусть задана функция, например, синус. Требуется изобразить графики полиномиальных и рациональных аппроксимаций этой функции в зависимости от выбранных точек (узлов интерполяции), в которых значения функции и аппроксимирующей функции совпадают. Напишите манипулятор, в котором узлы интерполяции можно двигать.

Выпуклые многогранники

Допустим, что выпуклый многогранник (в конечномерном вещественном аффинном пространстве) задан как выпуклая оболочка конечного числа точек. Выпишите полную систему неравенств, задающих этот многогранник. Наоборот, если многогранник задан системой неравенств, найдите его вершины.

Вырождения критических точек

Критическая точка функции f называется вырожденной, если второй дифференциал в этой точке - вырожденная квадратичная форма. Для двух многочленов четвертой степени P и Q от двух переменных, найдите значения параметра t , при которых функция $P+tQ$ имеет вырожденную критическую точку. Запрограммируйте манипулятор, который, по значению



параметра t , рисует критические точки функции $P+tQ$, и указывает индексы этих критических точек (индекс = число минусов в диагонализации второй квадратичной формы). Та же задача для тригонометрических многочленов, определенных на торе.

Геометрическая динамика

Рассмотрим такую динамическую систему. Треугольнику сопоставляется ортотреугольник. Запрограммируйте манипулятор, реализующий эту динамическую систему. Треугольники нужно подвергать гомотетии, чтобы их размеры не уменьшались. Выясните, как выглядит динамика.

Та же задача для такой динамической системы: выпуклый пятиугольник переходит в выпуклый пятиугольник, ограниченный частями диагоналей исходного. Здесь пятиугольники можно рассматривать с точностью до гомотетий, аффинных или проективных преобразований - введите соответствующие нормировки.

Числа Гурвица

Напишите программу вычисления чисел Гурвица. Выпишите члены малых степеней в производящей функции для чисел Гурвица. Подробности см. лекции Ландо прошлого года по комбинаторике, есть на vyshka.math.ru

Ряды Эйзенштейна

Напишите программу, выражающую ряд Эйзенштейна в виде многочлена от G_4 и G_6 . При помощи этой программы, найдите G_{100} .

Замощения плоскости

Нарисуйте фундаментальную область группы замощений плоскости. Сделайте так, чтобы пользователь мог менять форму фундаментальной области (но чтобы она всегда оставалось фундаментальной областью), и чтобы мог выбирать одну из 17 групп замощений.

Синтаксический анализ

Напишите функцию, которая по текстовой строке, содержащей цифры, скобки и арифметические операции, производит указанное вычисление. Например, должно быть $\text{eval}["(2+3*5)-(6+10)"] = 1$

Диаграммы Вороного

Рассмотрим конечное множество точек X на плоскости. Клетка Вороного элемента $x \in X$ определяется как множество точек плоскости, расстояние от которых до x меньше, чем до любого другого элемента множества X . Диаграмма Вороного - это разбиение плоскости на клетки Вороного точек множества X . Напишите манипулятор, позволяющий ставить точки, или выбирать случайные наборы точек, и строящий по данным точкам диаграмму Вороного.

Векторные поля и предельные циклы

По векторному полю, зависящему от параметра, нарисуйте предельные циклы, некоторые близлежащие траектории, и само векторное поле. Например, можно рассмотреть семейство уравнений ван дер Поля.

Огибающие семейств прямых

Напишите программу, рисующую семейство прямых и его огибающую. Нужно сделать так, чтобы параметры семейства можно было менять.

Поризм Понселе



Если в одну конику можно вписать треугольник, описанный вокруг другой коники, то таких треугольников бесконечно много - можно поставить вершину треугольника в любую точку первой коники, и начать его рисовать - картинка замкнется. Такое же утверждение верно про многоугольники с любым фиксированным числом вершин. Нарисуйте соответствующие картинки, в которых можно будет менять как коники, так и вписанные-описанные многоугольники.

Идеалы в кольце многочленов

Даны образующие некоторого идеала в кольце многочленов от n переменных (скажем, с комплексными коэффициентами). Еще дан многочлен. Напишите функцию, определяющую, лежит ли данный многочлен в данном идеале, и, если лежит, то как он выражается через образующие идеала.