Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
"Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"

Факультет физики

Рабочая программа дисциплины
Математическая физика

для образовательной программы «Физика»
направления подготовки 03.03.02 Физика
уровень высшего образования – бакалавриат

Разработчик(и) программы
В.Н. Глазков, д.ф.-м.н., vglazkov@hse.ru

Утверждена Координационным советом факультета физики
«30» __июня__ 2017 г., № протокола_____5_____

Академический руководитель
образовательной программы Трунин М.Р. ___________________________

Москва, 2017

1 Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к образовательным результатам и результатам обучения студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов направления 03.03.02 «Физика» подготовки бакалавров.

Программа учебной дисциплины разработана в соответствии с:

- Образовательным стандартом НИУ ВШЭ 03.03.02 «Физика» по подготовке бакалавров;
- Учебным планом университета по образовательной программе 03.03.02 «Физика» подготовки бакалавров, утвержденным в 2017 г.

2 Цели освоения дисциплины

Курс предназначен для формирования навыков обращения студентов с типичными математическими задачами, которые возникают при исследовании физических проблем. Рассматриваются линейные дифференциальные уравнения в частных производных различных типов и способы их решения, включая технику функций Грина, преобразования Лапласа, разложения по собственным функциям и т.д. Считается необходимым развитие интуитивного восприятия аппарата. Для этого устанавливается связь математических результатов с физической картиной явлений, описываемых изучаемыми уравнениями. Обсуждаются точные решения нелинейных уравнений (солитоны). Приводятся различные способы исследования асимптотического поведения решений уравнений, опирающиеся на интегральные представления и аналитические свойства. Общие положения подробно иллюстрируются на материале специальных функций (функции Бесселя, гипергеометрическая и вырожденная гипергеометрическая функции) и ортогональных полиномов. Специальное внимание уделено симметрийным аспектам рассматриваемых задач. Курс содержит элементы теории представлений группы вращений и ее дискретных подгрупп с приложением к квантовомеханическим задачам, таким, как расщепление термов за счет слабых возмущений с более низкой симметрией и правилам отбора переходов различного рода.

3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

Код по ФГОС/ НИУ	Компетенция	Дескрипторы- показатели достижения компетенций	Способы формирования
УК-3	Способен решать проблемы в профессиональной деятельности на основе анализа и синтеза	РБ/СД – знает основные понятия, модели и методы исследований механики; - постановку актуальных современных проблем механики	Лекции, семинары, домашние работы по применению принципов математической физики для решения задач широкого круга
ОПК-3	Способен критически оценивать применимость методик и методов	РБ\СД – знает методы и средства выполнения аналитических расчетов, вычислительных и графических работ.	Семинары
ПК-5	Способен проводить	РБ – знает принципы построения физических и	Лекции, семинары

	методические и экспертные работы в области физики, математики и информатики	математических моделей, методы анализа их применимости к конкретным процессам	

4 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина относится к базовой части профессионального цикла дисциплин студентов, обучающихся на по направлению 03.03.02 «Физика» подготовки бакалавров. В соответствии с рабочим учебным планом по направлению «Физика» дисциплина «Математическая физика» читается студентам второго и третьего годов обучения в бакалавриате.

Трудоемкость курса– 5 з.е.
Общее количество часов – 190
Количество аудиторных часов 144, в том числе: 72 часа лекций, 72 часа семинаров.
Количество часов самостоятельной работы – 46.

Изучение данной дисциплины базируется на знаниях, полученных студентами при освоении учебных дисциплин:

- Математический анализ
- Алгебра
- Механика
- Электричество и магнетизм
- Теория функций комплексного переменного
- Дифференциальные уравнения
- Линейная алгебра

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении дисциплин:

- Квантовая механика
- Физика сплошных сред

5 Тематический план учебной дисциплины

№	Название раздела	Всего часов	Аудиторные часы		Самостоятельная работа
			Лекции	Семинары	
1	Смешанная задача для уравнения теплопроводности на отрезке. Метод Фурье.	18	6	6	6
2	Смешанная задача для уравнения колебаний струны на отрезке	22	8	8	6
3	Функции Бесселя и их применение к решению задач на собственные значения для круглой мембраны.	22	8	8	6
4	Уравнения Лапласа и Пуассона в $\mathfrak{R}^3$	26	10	10	6
5	Метод разделения переменных в сферических координатах для уравнения	26	10	10	6

	Лапласа в $\mathfrak{R}^3$. Сферические функции				
6	Интегральные уравнения	26	10	10	6
7	Задача Штурма-Лиувилля	26	10	10	6
8	Потенциалы	24	10	10	4
	Итого:	**190**	**72**	**72**	**46**

Формы контроля знаний студентов:

Тип контроля	Форма контроля	модули				Параметры
		1	2	3	4	
Промежу-точный	Контрольная работа			18 неделя		письменный экзамен 90 мин.
Промежуточный по дисциплине	Экзамен				19 неделя	Устный экзамен 60 мин
Промежу-точный	Контрольная работа	18 неделя				письменный экзамен 90 мин.
Промежу-точный (завершающий по дисциплине)	Экзамен		15 неделя			Устный экзамен 60 мин

6 Критерии оценки знаний, навыков

1 Критерии оценки знаний, навыков

Оценки по всем формам контроля выставляются по 10-ти балльной шкале.

Оценка контрольной работы:

Производится одним из следующих способов:

1 способ оценивания

За каждую задачу назначается определенное количество баллов (в сумме 10), эти баллы сообщаются при раздаче задач. При оценивании суммируются баллы за верно решенные задачи. За задачи, решенные с недочетами в обоснованиях или незначительными ошибками, может быть начислено уменьшенное количество баллов.

2 способ

8-10 решены верно все задачи (возможны небольшие недочеты в обоснованиях или вычислениях, чем и обусловлено различие в начисляемых баллах);

6-7 решены верно не менее 2/3 всех задач;

4-5 решены верно не менее половины всех задач.

Оценка ответа на экзамене (в конце семестра)

8-10 – обучающийся знает все определения (из части курса, прочитанной в данном и предыдущих семестрах), умеет приводить примеры, знает и понимает формулировки и доказательства всех теорем. Верно и с подробными обоснованиями решает задачу билета. Различие в начисляемых баллах связано с тем, что возможны отдельные неточности в формулировках или доказательствах, которые исправляются самостоятельно (при указании на их наличие) или не искажают смысл.

6-7 – обучающийся знает все определения и формулировки теорем (из части курса, прочитанной в данном и предыдущих семестрах), может привести основные примеры, знает и понимает доказательства основных теорем (из части курса, прочитанной в данном семестре), может решить задачу билета самостоятельно или при незначительной помощи преподавателя.

4-5 – обучающийся знает и понимает все определения (всего прочитанного курса) и все формулировки теорем (хотя бы из данного семестра), может привести простейшие примеры, знает и понимает отдельные доказательства.

Итоговая оценка по дисциплине равна полусумме оценок за работу в семестре и на экзамене, причем в случае нецелого среднего округление производится до следующего целого числа в большую сторону.

Критерии оценивания сформированности компетенций
Компетенции сформированы, если обучающийся получил положительные (не ниже 4 баллов по 10-балльной шкале) оценки за все три семестра.

7 Содержание дисциплины

Раздел 1. Смешанная задача для уравнения теплопроводности на отрезке. Метод Фурье.

Постановка смешанной задачи на конечном отрезке с граничными условиями Дирихле, единственность решения. Метод разделения переменных для задачи с однороднымиграничными условиями. Построение формального решения для случаев однородного и неоднородного уравнений. Обоснование метода Фурье. Условия согласования начального и граничных условий. Решение смешанной задачи при неоднородных граничных условиях.

Раздел 2. Смешанная задача для уравнения колебаний струны на отрезке

Постановка смешанной задачи для струны с закрепленными концами. Единственность решения (метод интеграла энергии). Построение формального решения методом Фурье (случаи однородного и неоднородного уравнений). Обоснование метода, условия согласования. Существование классического решения.

Раздел 3. Функции Бесселя и их применение к решению задач на собственные значения для круглой мембраны.

Задача на собственные значения и собственные функции для оператора Лапласа в круге при однородном краевом условии Дирихле. Разделение переменных. Дифференциальное уравнение Бесселя. Функции Бесселя первого рода и их свойства. Функции Бесселя, неограниченные в нуле. Представление для собственных функций и собственных значений круглой мембраны с закрепленными краями через функции Бесселя. Ортогональность собственных функций и функций Бесселя. Полнота системы собственных функций (без доказательства).

Раздел 4. Уравнения Лапласа и Пуассона в $\mathfrak{R}^3$

Интегральное представление решений уравнений Пуассона и Лапласа в ограниченной области. Пространство основных функций $D(\mathfrak{R}^n)$. Понятие сходимости последовательности функций в $D(\Re^n)$. Пространство обобщённых функций $D'(\Re^n)$, сходимость последовательности элементов из $D'(\Re^n)$. Локально интегрируемые функции и регулярные обобщённые функции. Дифференцирование обобщённых функций. Фундаментальное решение уравнения Лапласа в $\Re^3$.

Гармонические функции в $\Re^3$ и их свойства. Бесконечная дифференцируемость гармонических функций. Теорема о среднем. Принцип максимума и минимума.

Задача Дирихле для уравнения Пуассона, единственность классического решения. Функция Грина задачи Дирихле; решение задачи Дирихле с помощью функции Грина. Симметричность функции Грина (без доказательства). Функция Грина для шара. Формула Пуассона решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре. Теорема Лиувилля, теорема об устранимой особенности для гармонических функций. Преобразование Кельвина. Регулярность поведения гармонической функции на бесконечности.

Постановка внешних краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа в $\Re^3$. Единственность решения внешних задач Дирихле и Неймана в $\Re^3$.

Раздел 5. Метод разделения переменных в сферических координатах для уравнения Лапласа в $\Re^3$. Сферические функции.

Уравнение Лапласа в сферических координатах. Сферические функции как собственные функции оператора Лапласа-Бельтрами на единичной сфере S_1. Шаровые функции (гармонические многочлены). Собственные значения оператора Лапласа-Бельтрами. Дифференциальное уравнение Лежандра. Полиномы Лежандра и присоединённые функции Лежандра. Выражение сферических функций в сферической системе координат.
Ортогональность и полнота (без доказательства) сферических функций в $L_2(S_1)$. Решение задач Дирихле и Неймана в шаре и шаровом слое в форме рядов по шаровым функциям.

Раздел 5. Интегральные уравнения

Интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Непрерывность интегральных операторов с непрерывными и полярными ядрами в пространстве C(G). Союзное уравнение. Характеристические числа и собственные функции ядра интегрального оператора. Интегральные уравнения с вырожденными ядрами. Сведение их к системе линейных алгебраических уравнений. Теоремы Фредгольма в этом случае.

Интегральные уравнения с непрерывными и полярными ядрами. Уравнение с малым по норме оператором. Ряд Неймана. Сведение уравнений с полярными ядрами к уравнениям с вырожденными ядрами. Теоремы Фредгольма в общем случае. Уравнения с эрмитовыми ядрами. Симметричность интегрального оператора с эрмитовым ядром. Теорема о существовании характеристических чисел. Теорема Гильберта-Шмидта для уравнений с непрерывными эрмитовыми ядрами

Раздел 6. Задача Штурма-Лиувилля

Функция Грина задачи Штурма-Лиувилля; ее существование, симметричность, непрерывность. Сведение задачи Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению с эрмитовым ядром. Свойства спектра и собственных функций. Теорема Стеклова.

Раздел 7. Потенциалы

Объемный потенциал и его свойства. Потенциал простого слоя, его непрерывность в R3. Потенциал двойного слоя. Формула Гаусса, скачок потенциала двойного слоя при переходе через поверхность. Правильная нормальная производная потенциала простого слоя, формула скачка для нормальной производной. Сведение задач Дирихле и Неймана для уравнения

Лапласа посредством потенциалов к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода на границе. Однозначная разрешимость внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана.

8 Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

8.1 Контрольная работа

1) Первая контрольная работа

- Решить смешанные задачи

а) $u_{tt} = u_{xx} - 2\cos 3t,\ t > 0,\ 0 < x < \pi$,
б) $u_x|_x{=}0 = 0,\ u_{x|x=\pi} = 2\pi\cos 3t,\ t > 0$,
в) $u_{|t=0} = x^2,\ u_{t|t=0} = 0,\ 0 \le x \le \pi$;

2) Вторая контрольная работа

- Пусть $0 < \mu 1 < \mu 2 < \ldots$ корни уравнения $J'2(\mu) = 0$. Доказать, что

$$\int_0^1 rJ_2(\mu_m r)J_2(\mu_n r)\,dr = 0, \quad \text{если} \quad m \neq n.$$

- С помощью потенциалов решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа внутри и вне шара $|x| < R$ в $\Re^3$

8.2 Вопросы для оценки качества освоения дисциплины

- Функция Грина задачи Штурма-Лиувилля
- Уравнение Лапласа в сферических координатах.
- Постановка смешанной задачи на конечном отрезке с граничными условиями Дирихле
- Функции Бесселя первого рода и их свойства.

9 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

9.1 Основная литература

1. Уравнения математической физики: учебник для вузов / В. С. Владимиров, В. В. Жаринов. – Изд. 2-е, стер. – М.: Физматлит, 2003. – 399 с. - ISBN 978-5-922103-10-7.
2. Дифференциальные уравнения в частных производных: учеб. пособие мех.-мат. и физ. специальностей вузов / В. П. Михайлов. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. – 424 с.

9.2 Дополнительная литература

1. И. С. Градштейн и И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, гл. Специальные функции, Москва, Физматгиз, 1962.
3. Н. М. Гюнтер и Р. О. Кузьмин, Сборник задач по высшей математике, части 1 и 2, Физматгиз, 1958. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, Лань, СП. 2008.
4. Г. Бейтмен и А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, Лань, СП, 2001.
5. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, Теория солитонов, Москва, Наука, 1980.
6. Дж. Мэтьюз, Р. Уокер, Математические методы физики, Москва, Атомиздат, 1972.

.

9.3 Дистанционная поддержка дисциплины

Дистанционная поддержка дисциплины обеспечивается использованием LMS. В разделе дисциплины размещаются дополнительные материалы, связанные с лекциями, семинарами, материалы для самоподготовки, оценки текущего и итогового контроля.

10 Материально-техническое обеспечение дисциплины

Проектор (лекционные и практические занятия), классы для практических занятий.