ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Московский институт электроники и математики им. А.Н. Тихонова

Левченко Валентин Игоревич

ФАЗОВЫЕ ДИАГРАММЫ УЛЬТРАХОЛОДНЫХ ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ГАЗОВ В ЛОВУШКАХ

Выпускная квалификационная работа
по направлению 01.03.04 Прикладная математика
шифр наименование направления подготовки

студента образовательной программы бакалавриата
«Прикладная математика»
наименование образовательной программы

Студент

_____

Научный руководитель
Доцент, PhD.

_____
Е. А. Буровский

Рецензент
Доцент, к.ф.-м.н.,

_____
Р.Ш. Ихсанов

Москва 2018

Аннотация

Объектом данного исследования являются поляризованные ультрахолодные Ферми-газы в ловушках. Цель работы - расчет большой канонической фазовой диаграммы квазиодномерной модели Хаббарда на оптической решетке типа “Toblerone”. В процессе работы были изучены соответствующие основы теории квантовой механики и квантовой статистики. Разработан алгоритм на языке Python с использованием пакета библиотек для моделирования физических процессов ALPS для описания оптической решетки вида “Toblerone”. Для последующего вычисления фазовой диаграммы, соответствующей данной решетке, использовался метод ренормализационной группы матрицы плотности (DMRG). Полученная диаграмма содержит мультикритическую точку и границы раздела состояний поляризованного газа. Полученные результаты могут оказаться полезными при последующем проведении практических экспериментов, и лечь в их основу.

Phase diagrams of trapped ultracold gases

Abstract

In this work, polarised ultracold trapped Fermi gases are studied. The main goal is the calculation and analysis of the grand canonical phase diagram of quasi-one-dimensional Hubbard model for a “Toblerone” optical lattice. The necessary theoretical background of the quantum mechanics and quantum statistics has been studied. The solution has been obtained by means of an algorithm in Python programming language and Algorithms and Libraries for Physical Simulations (ALPS). Using Density Matrix Renormalisation Group (DMRG) technique, the phase diagram for the “Toblerone” optical lattice has been calculated. The obtained diagram features a multicritical point and borders between phases of polarised gas. The obtained results might be used in the future as the basis for the practical experiments.

Оглавление

Введение 4
Глава 1. Обзор проблематики исследования 5
Глава 2. Теоретическая основа 7
2.1. Ультрахолодные поляризованные Ферми-газы 7
2.2. Модель Хаббарда 8
2.3. Зонная теория 9
Глава 3. Описание разработанного алгоритма 11
3.1. Описание оптической решетки 11
3.2. Уравнения линий фазовых переходов 12
Заключение 16
Список литературы 17

Введение

Теория ультрахолодных Ферми-газов сформировалась относительно недавно. В то же время, результаты практических экспериментов способны пролить свет на правдивость или ложность тех или иных фундаментальных теорий. Данные результаты важны ввиду своей применимости к широкому спектру задач. За счет уникальности свойств атомного газа стали возможны наблюдение новых явлений квантовой физики и проверка теорий. К примеру, измерения термодинамических характеристик Ферми-газов позволяют проверять модели высокотемпературной сверхпроводимости.

Формирование газов с определенным порядком частиц, обладающих тем или иным спином осуществляется при помощи оптических ловушек, которые удерживают атом, независимо от его внутреннего состояния. Элементарным примером оптической ловушки служит фокус лазерного луча. Механизм удержания атомов называется пленением, и изображен на рис. 1.

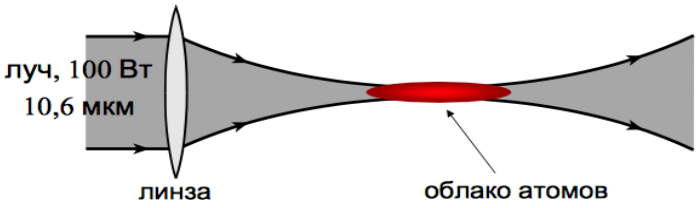

Рис. 1. Удержание атомов в фокусе луча лазера.

Пленение - результат взаимодействия электрического дипольного момента атома $\vec{d}$ с переменным электрическим полем $\vec{E}(t)$. При отсутствии поля ядро атома находится в центре электронной оболочки, и $\vec{d}$ = 0. Электронная оболочка смещается относительно ядра внешним электрическим полем, что создает дипольный момент $\vec{d} = \alpha\vec{E}$, где α — поляризуемость.

Глава 1. Обзор проблематики исследования

Поляризованными называются Ферми-газы, в которых число частиц со спином вверх значительно превосходит количество частиц со спином вниз (или наоборот; не ограничивая общности суждений, будем рассматривать первый случай). Вычисление фазовых диаграмм для различных моделей на различных оптических решеток позволяет пролить свет на физику экзотических состояний газов, в которых они могут проявлять такие свойства как сверхпроводимость. Примером из упомянутых экзотических состояний является механизм спаривания куперовских пар, в котором появляется сверхтекучесть пар с конечным центром масс [1]. Основная проблема подобных исследований заключается в том, что полноценное наблюдение экзотических фаз, как, например, фаза Фульде-Ферела-Ларкина-Овчинникова (FFLO), в трехмерных моделях сопровождается большими сложностями аналитического и вычислительного характера.

Однако считается, что с помощью изменения размерности может быть получена дополнительная информация. Под этим подразумевается анализ одномерных фазовых диаграмм (вместо трехмерных). В то же время рассмотрение одномерных моделей является предпочтительным вариантом, поскольку при нем возможно использование наиболее эффективных численных и аналитических методов. Это, помимо всего прочего, и эмпирический подход, так как также возможно проведение практических экспериментов над ультрахолодных Ферми-газами [1]. При работе с ультрахолодными частицами можно рассматривать трехмерную оптическую решетку как набор выровненных одномерных трубок. Это позволяет достичь плавного перехода от трехмерного случая к одномерному.

Одним из наиболее перспективных подходов в изучении поляризованных сверхтекучих материй является пленение атомов Ферми-газа сигарообразной ловушкой. Изменение размерности модели может быть достигнуто путем изменения размеров ловушки [2]. В некоторых случаях посредством помощью численного моделирования удается доказать существование состояния FFLO в таких условиях

[3]. Помимо этого, в системах Ферми-газов при температуре, близкой к абсолютному нулю, также возможно формирование фазы, в которой газ обладает сверхтекучестью. В подобных системах возможно s-волновое взаимодействие с отрицательной длиной рассеяния, что соответствует притяжению между частицами. Данное явление схоже с образованием фазы сверхпроводимости в газе заряженных частиц.

Эксперименты с ультрахолодными газами обладают большим потенциалом. Вопрос сверхпроводимости был также подробно рассмотрен в [4]. Авторами была изучена модельная задача для газа ферми-частиц в оптических решетках с использованием метода DMRG. Были изучены условия существования состояния «тримеров» - фазы формирования троек фермионов - границы данной фазы. В тех случаях, когда плотность частиц со спином вниз была в два раза выше плотности частиц, возникающих при разгоне, возникала энергетическая щель. Переход от плотностей к новым переменным – химическому потенциалу и магнитному полю – позволил рассчитать каноническую фазовую диаграмму для данной модели.

Изменение размерности было реализовано с целью получения фазовой диаграммы среднего поля в [5]. Авторы также изучили сравнительную устойчивость обнаруженных экзотических сверхтекучих фаз, в том числе состояние FFLO, в зависимости от силы взаимодействия и температуры. В них также упоминаются основные трудности, связанные с достижением низких температур, достаточных для наблюдения фазы FFLO, и оценки одномерных измерений как перспективных с точки зрения наблюдения нерегулярных фаз.

Другим примером кроссоверной поляризации является [6]. Авторами изучалась интерполяция между одно- и трехмерной задачами путем изменения поляризации решетки и взаимодействий. Эксперименты с ультрахолодными газами показали, что эффективные массы атомов можно контролировать в ловушках, применяя квантово-размерные эффекты. Рассматриваются два потенциальных сценария: (1) когда частицы с различными спинами распределены равномерно и (2), когда происходит фазовое разделение между парными и одиночными атомами.

Однако данные сценарии, как правило, сильно различаются в одномерном и трехмерном случаях [8].

Глава 2. Теоретическая основа исследования

2.1. Ультрахолодные поляризованные Ферми-газы

Квантовым идеальным газом называется газ, свойства которого определяются законами квантовой механики и статистиками Ферми-Дирака и Бозе-Эйнштейна. Выделяют два вида газов, различных по собственному моменту импульса их частиц, называемого спином: Ферми-газы и Бозе-газы. В первом случае частицы газа – фермионы – обладают полуцелым спином, во втором – бозоны – целым. К фермионам относятся, в том числе, электроны, протоны, нейтроны и другие частицы. Нейтроны и протоны в состояниях ↑ и ↓ могут рассматриваться как спиновые состояния Фермиона со спином 3/2, поскольку массы протона и нейтрона близки, а электрическим зарядом протона можно пренебречь, например, если кулоновская энергия много меньше энергии фундаментального сильного взаимодействия. В данной работе рассматриваются ультрахолодные поляризованные Ферми-газы.

Свойства рассматриваемых в данной работе газов описываются статистикой Ферми-Дирака и принципом запрета Паули. Последний подразумевает, что любые два фермиона не могут одновременно находиться в одном и том же квантовом состоянии. Состояние фермиона однозначно определяют четыре квантовых числа: главное n, орбитальное l, магнитное m, и магнитного спиновое m_s. Соответственно, электроны в атоме распределяются по следующему правилу: любые два электрона одного атома не могут обладать одинаковыми наборами квантовых чисел.

Согласно статистике Ферми-Дирака, функция распределения числа частиц по состояниям с энергией имеет вид:

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} + 1},$$

где μ - химический потенциал, k - постоянная Больцмана, T - абсолютная температура системы. При температурах, близких к абсолютному нулю, химический

потенциал практически равняется энергии Ферми E_F. В данном случае функция распределения частиц принимает следующий вид:

$$F(E) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - E_F}{kT}} + 1},$$

и называется функцией Ферми.

2.2. Модель Хаббарда

Изначально стояла задача максимально упрощенного описания взаимодействия электронов в твердом теле. Модель Хаббарда представляет собой приближенную модель твердого тела. Известные решения двух- и трехмерной моделей Хаббарда описывают большой набор фазовых состояний, включая изолятор, проводник, ферромагнетик, антиферромагнетик, сверхпроводник. В ходе практических испытаний возможно приготовление атомного газа, практически полностью соответствующего модели Хаббарда. Благодаря этому возможно наблюдение состояний, ранее спрогнозированных аналитической моделью. Кроме того позволяет наблюдать в эксперименте состояния, предсказанные до этого моделью, а также находить новые решения модели, которые в ходе теоретических расчетов еще неизвестны.

Модель описывает фермионы в периодическом потенциале. Частицы могут перемещаться между узлами потенциала и взаимодействовать, если находятся в одном узле. Модель основана на гамильтониане, который в рамках вторичного квантования записывается следующим образом:

$$H = -\sum_{\langle i,j \rangle \sigma} t_\sigma \left(c_{i,\sigma}^\dagger c_{j,\sigma} + \text{э.с.} \right) + U \sum_i n_{i\uparrow} n_{i\downarrow} \qquad (1)$$

где $U < 0$ - параметр взаимодействия частиц, находящихся в одном узле, а через t_σ обозначается амплитуда туннелирования - перескоковый интеграл, описывающий кинетическую энергию перехода электронов между атомами. Также, $c_{i,\sigma}^\dagger$ и $c_{j,\sigma}$ - операторы создания и уничтожения фермионов со спином σ в узлах решетки с номерами i и j соответственно. Таким образом, первое слагаемое гамильтониана

характеризует переходы частиц между соседними узлами решетки за время $\approx \hbar/t$. Наконец, $n_{i\sigma} = c_{i,\sigma}^{\dagger} c_{j,\sigma}$- операторы числа фермионов со спином σ в узле под номером i, и через второе слагаемое описывается взаимодействие частиц в одном узле.

2.3. Зонная теория

Согласно постулатам Бора, в случае системы атомов, которые не взаимодействуют друг с другом, энергетические уровни электронов имеют дискретная. Примером такой системы является любой разреженный газ. Расстояние между атомами газа уменьшается по мере конденсации его в жидкость и формировании кристаллической решетки твердого тела, вследствие чего появляется взаимодействие между ними. Данное взаимодействие приводит к расщеплению энергетических уровней, которые образуют так называемую энергетическую зону. При этом расщепляются как полностью заполненные уровни, так и частично заполненные. Ширину энергетической зоны определяет природа атомов тела. При этом она тем больше, чем дальше от ядра она находится. Таким образом, зона, соответствующая электронам внешнего энергетического уровня, обладает наибольшей шириной. Оценку ширины энергетической зоны можно при помощи соотношения неопределенности:

$$\Delta E \tau \geq h \, ,$$

где ΔE - ширина зоны, $\tau \approx 10^{-8}$ с - время жизни атома в возбужденном состоянии, h - постоянная Планка.

Энергетические зоны, порожденные различными энергетическими уровнями, разделяются запрещенной зоной. При этом зона максимальных разрешенных значений энергии называется зоной проводимости. Зона, расположенная ниже, называется валентной. Атомы могут обмениваться валентными электронами, в результате чего образуется электронный газ.

В зависимости от ширины запрещенной зоны, твердые тела можно классифицировать следующим образом:

- металлы - зона запрещенных значений энергии отсутствует, т. е. валентная и зона проводимости соприкасаются или пересекаются
- диэлектрики - ширина запрещенной зоны составляет более 3 эВ
- полупроводники - ширина запрещенной зоны не превышает 3 эВ

В первом случае валентная зона заполнена не полностью, причем практически любое тепловое воздействие на систему приводит к возникновению электрического тока: электроны переходят на более высокие энергетические уровни, в свободные состояния; при помещении системы в электрическое поле квантовое состояние данных электронов меняется, и они начинают движение в направлении, противоположном действию поля. Стоит заметить, что в данном движении участвуют только электронный, находящиеся на неполностью заполненных уровнях.

При абсолютном нуле в диэлектриках валентная зона оказывается заполнена. Поскольку зона запрещенных значений энергии слишком широка, при низких температурах ток не возникает - для перехода электронов в зону проводимости недостаточно энергии.

Поскольку ширина запрещенной зоны у полупроводников не так велика, как в случае диэлектриков, но все же значительна, по проводимости они существенно не различаются. Валентная зона также оказывается полностью заполнена электронами, однако энергии теплового воздействия в данном случае хватает, чтобы электроны перешли в зону проводимости. Очевидно, что чем больше воздействие, тем сильнее ток, проходящий через полупроводник.

Глава 3. Описание разработанного алгоритма

3.1. Описание оптической решетки

Для решения поставленной задачи реализован алгоритм на языке программирования Python 2. В данной работе также используются дополнительные инструменты пакета библиотек для моделирования физических процессов ALPS, в частности - метод ренормализационной группы матрицы плотности (DMRG).

Прежде всего, требовалось описать оптическую вида “Toblerone” - решетку лестничного типа с тремя направляющими. Данная решетка качественно отличается от решеток с одной (“Open Chain”, цепочка) и двумя направляющими (“Ladder”, лестница), которые рассматривались в предыдущих работах. Она представляет собой три цепочки, соответствующие звенья которых, в свою очередь, связаны между собой. Пример такой решетки длины $L = 3$ представлен на рис. 2.

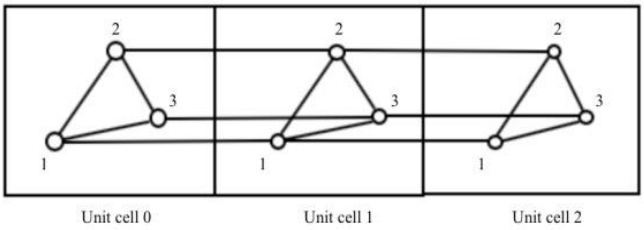

Рис. 2. Пример решетки вида “Toblerone” длины L = 3.

При расчетах подразумевалось, что оптическая решетка имеет открытые граничные условия. Вычисления производились для решетки длины L = 40 при значениях параметров гамильтониана (1) t = 1 и U = -4.

Оптическая решетка описывалась с использованием средств пакета ALPS следующим образом: задаются векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ элементарной ячейки, после чего копированием данной ячейки в направлении указанных векторов создается сетка ячеек, как показано на рис. 3. После этого для каждой элементарной ячейки описываются положения в ней частиц и связи между ними. Связи при этом бывают

не только между частицами одной ячейки, но и между соответствующими частицами, размещенными в соседних ячейках.

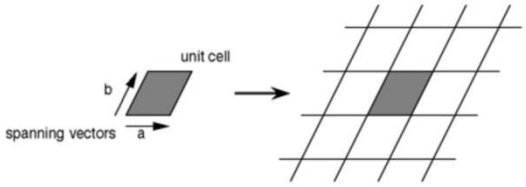

Рис. 3. Пример описания сетки оптической решетки. Производится копирование элементарной ячейки решетки (выделена серым цветом) в направлении задающих ее векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3.2. Уравнения линий фазовых переходов

После описания решетки был произведен расчет фазовой диаграммы. Кроме состояния полностью поляризованного газа (Fully Polarised (FP)), существуют три основные фазы: вакуум (химический потенциал μ принимает отрицательное и большое по модулю значение), фаза равных плотностей (Equal densities (ED) - так называемый неполяризованный газ; магнитное поле h принимает малое по модулю значение), а также состояние частично поляризованного газа (Partially Polarised (PP) - магнитное поле достаточно большое). Таким образом, можно сформулировать физический смысл линий, которые разделяют эти фазы: при значениях μ и h, удовлетворяющих уравнениям, которыми описываются данные линии, происходят фазовые переходы. Границы состояний вакуума, ED, FP и PP пересекаются в одной точке, называемой мультикритической. При неравных массах частиц со спинами вверх и вниз соответственно мультикритическая точка превращается в область [4].

Фазовая диаграмма рассчитывалась в переменных $\mu - h$, соответствующих значениям среднего химического потенциала $\mu = \frac{\partial E}{\partial (N_{\uparrow} + N_{\downarrow})}$ и эффективного

магнитного поля $h = \frac{\partial E}{\partial(N_\uparrow - N_\downarrow)}$, где E - энергия основного состояния, наряду с фиксированными значениями t = 1 и U = -4.

Значения химического потенциала μ и магнитного поля h задают границы состояний на фазовой диаграмме следующим образом:

- Граница “вакуум-неполяризованный газ (ED)”. Рассмотрим точку на границе данных фаз, и пусть $\mu = 0$, а $h = -\infty$. В таком случае состояние - вакуум; частиц нет. При повышении химического потенциала μ наступает момент, когда две частицы с разными спинами образуют пару. Большая каноническая энергия системы одной пары:

$$E(1,1) - \mu \cdot (1+1) - h \cdot (1-1) = 0$$

  Таким образом, уравнение границы принимает вид: $\mu = \frac{E(1,1)}{2}$. Если при данном фиксированном значении μ начать увеличивать значение h, указанная пара не будет разорвана тут же - это произойдет при некотором критическом значении h, т. е. в некоторой критической точке $(h, \frac{E(1,1)}{2})$.

- Рассмотрим точку на границе состояний вакуума и полностью поляризованного газа (FP). В простейшем случае полностью поляризованный газ состоит из одной частицы со спином вверх. Тогда большая каноническая энергия системы равна:

$$E(1,0) - \mu \cdot (1+0) - h \cdot (1-0) = 0,$$

  и уравнение границы имеет вид: $\mu = -h + E(1,0)$.

- Граница “неполяризованный газ (ED) – частично поляризованный газ (PP)”. Для нахождения значений химического потенциала $\mu = \frac{\partial E}{\partial(N_\uparrow + N_\downarrow)}$ и эффективного магнитного поля $h = \frac{\partial E}{\partial(N_\uparrow - N_\downarrow)}$ используются разностные формулы ($N_\uparrow = N_\downarrow$):

$$\mu = \frac{E(N_\uparrow + 1,\ N_\downarrow + 1) - E(N_\uparrow,\ N_\downarrow)}{(N_\uparrow + 1 + N_\downarrow + 1) - (N_\uparrow + N_\downarrow)} = \frac{E(N_\uparrow + 1,\ N_\downarrow + 1) - E(N_\uparrow,\ N_\downarrow)}{2},$$

$$h = \frac{E(N_\uparrow + 1,\ N_\downarrow - 1) - E(N_\uparrow,\ N_\downarrow)}{(N_\uparrow + 1 - N_\downarrow + 1) - (N_\uparrow - N_\downarrow)} = \frac{E(N_\uparrow + 1,\ N_\downarrow - 1) - E(N_\uparrow,\ N_\downarrow)}{2}$$

- Наконец, граница “частично поляризованный газ (PP) – полностью поляризованный газ (FP)”. Подход для вычисления μ и h схож с предыдущим случаем, с учетом того, что в граничном случае: $N_\uparrow > 0,\ N_\downarrow = 1$ для частичного поляризованного, и $N_\uparrow > 0,\ N_\downarrow = 0$ для полностью поляризованного газа соответственно. Аппроксимационные формулы принимают следующий вид:

$$\mu = \frac{E(N_\uparrow + 1,\ 1) - E(N_\uparrow,\ 0)}{(N_\uparrow + 1 + 1) - N_\uparrow} = \frac{E(N_\uparrow + 1,\ 1) - E(N_\uparrow,\ 0)}{2},$$

$$h = \frac{E(N_\uparrow - 1,\ 1) - E(N_\uparrow,\ 0)}{(N_\uparrow - 1 - 1) - N_\uparrow} = \frac{E(N_\uparrow - 1,\ 1) - E(N_\uparrow,\ 0)}{-2},$$

- Главная содержательная часть искомой диаграммы представляет собой мультикритическую точку и поведение двух предыдущих фазовых границ в ее окрестности. Однако при подобных вычислениях зачастую выделяют две фазы полностью поляризованного газа, основное различие между которыми различается в числе частиц $N_\uparrow$. В первом случае оно принимает максимальное значение и равно числу узлов оптической решетки N_{total} . В другом случае оно положительно, но меньше этого значения. Для нахождения уравнения фазового перехода приравниваются значения большой канонической энергии:

$$E(N_\uparrow, 0) - \mu \cdot N_\uparrow - h \cdot N_\uparrow = E(N_{total}, 0) - \mu \cdot N_{total} - h \cdot N_{total}$$

В левой части уравнения $N_\uparrow = N_{total} - 1$, так как рассматривается граничный случай. При этом μ и h одинаковы для обеих фаз. Тогда:

$$\mu = -h + E(N_{total}, 0) - E(N_{total} - 1, 0) = -h - E(1, 0)$$

Очевидно, что прямая, описываемая данным уравнением, параллельна границе между вакуумом и полностью поляризованным газом.

Расчет фазовой диаграммы производился для решетки типа «Toblerone» с использованием алгоритмов DMRG и вышеупомянутых аналитических результатов. Итоговая диаграмма представлена на рис. 4.

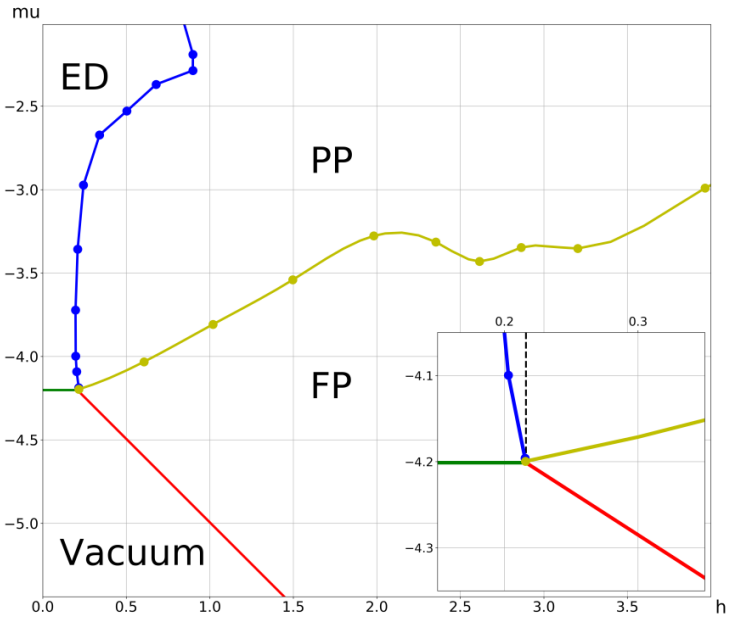

Рис. 4. Фазовая диаграмма квазиодномерной модели Хаббарда на оптической решетке типа “Toblerone”. Значения параметров: t = 1, U = -4 и L = 40.

В экспериментах с ультрахолодными газами в ловушках, т.е. при наложении внешнего удерживающего потенциала $V(r)$, в приближении локальной плотности описывается локальным сдвигом значения химического потенциала. На полученной фазовой диаграмме это соответствует вертикальным отрезкам. Знак производной $\frac{\partial h}{\partial \mu}$ в окрестности мультикритической характеризует изгиб линии раздела фаз неполяризованного и частичного поляризованного газа. Он же соответствует структуре облака с газом пар частиц в центре и частично поляризованным газом на краях. Данная картина схожа с результатами экспериментам над трехмерной моделью, в отличие от экспериментов с одномерным газом, где, наоборот, в центр облака находится частично поляризованный газ, а газ спаренных частиц распределен по краям [6].

Таким образом, фазовая диаграмма качественно меняется при переходе от одномерного к квазиодномерному случаю.

Заключение

В данной работе изучена модельная задача с квазиодномерной геометрией оптической решетки, для модели Хаббарда на которой были проведены вычисления канонической фазовой диаграммы. Полученная диаграмма содержит мультикритическую точку и границы раздела состояний газа. Характер изгиба линии границы неполяризованного и частично поляризованного газа свидетельствует о том, что фазовая диаграмма ультрахолодных поляризованных газов качественно меняется при переходе от строго одномерной модели к квазиодномерной. Результат более соответствует наблюдаемому для трехмерной модели. Структура диаграммы отличается от аналогичных для оптических решеток с одной и двумя направляющими в сферически симметричных и сигарообразных ловушках. Для решения поставленной задачи был реализован алгоритм на языке программирования Python с использованием метода ренормализационной группы матрицы плотности пакета библиотек ALPS.

Проблемы, рассмотренные в этом исследовании, актуальны, поскольку полученные результаты могут быть применены в глобальных исследованиях, касающихся производства и использования сверхтекучих и сверхпроводящих материалов. Результаты давно работы могут быть использованы как опорная точка для последующих практических экспериментов над ультрахолодными поляризованными Ферми-газами.

Список литературы

[1] M. Dalmonte et al. “Dimer, trimer, and Fulde-Ferrell-Ovchinnikov liquids in mass- and spin-imbalanced trapped binary mixtures in one dimension,” *Physical Review*, pp. 1-7, 2012. [PDF].

[2] C. Castellani, C. D. Castro, and W. Metzner, “Dimensional crossover from Fermi to Luttinger fluid,” *Physical Review*, 1994. Available: https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.72.316. [Дата доступа: 24.01.2018].

[3] A. Feiguin and F. Heidrich-Meisner, “BCS–BEC Crossover and Unconventional Superfluid Order in One Dimension,” *Physical Review*, 2011. [PDF].

[4] Giuliano Orso, Evgeni Burovski, and Thierry Jolicoeur. “Luttinger liquid of trimers in Fermi gases with unequal masses,” *Physical Review*, 2010. Available: https://arxiv.org/pdf/0907.1533.pdf. [Дата доступа: 04.02.2018].

[5] Shovan Dutta and Erich J. Mueller. “Dimensional Crossover in a Spin-imbalanced Fermi gas,” *Physical Review*, 2016. Available: https://link.aps.org/accepted/10.1103/PhysRevA.94.063627. [Дата доступа: 08.02.2018].

[6] Melissa C. Revelle, Jacob A. Fry, Ben A. Olsen and Randall G. Hulet. “1D to 3D Crossover of s Spin-Imbalanced Fermi Gas,” *Physical Review*, 2016. Available: https://arxiv.org/pdf/1605.06986.pdf. [Дата доступа: 20.02.2018].

[7] Sebastian Eggert. “One-dimensional quantum wires: a pedestrian approach to bosonization,” *Theoretical Survey of One Dimensional Wire Systems*, vol.2,2017.Available: https://arxiv.org/pdf/0708.0003.pdf. [Дата доступа: 03.02.2018].

[8] F. Heidrich-Meisner, G. Orso, and A.E. Feiguin. “Phase separation of trapped spin-imbalanced Fermi gases in one-dimensional optical lattices,” *Physical Review*, 2010. Available: https://arxiv.org/pdf/1001.4720.pdf [Дата доступа: 09.01.2018]