

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
"Национальный исследовательский университет  
"Высшая школа экономики"**

Московский институт электроники и математики им. А.Н. Тихонова  
Департамент прикладной математики

**Рабочая программа дисциплины  
«Алгебраические методы решения динамических систем»**

для образовательной программы «Прикладная математика»  
направления подготовки 01.03.04 «Прикладная математика»  
уровень «бакалавр»

Разработчик программы  
проф. Карасев М.В. [mkarasev@hse.ru](mailto:mkarasev@hse.ru).

Одобрена на заседании департамента прикладной математики  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 г.

Руководитель департамента А. В. Белов \_\_\_\_\_ [подпись]

Утверждена Академическим советом образовательной программы  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 г., № протокола \_\_\_\_\_

Академический руководитель образовательной программы  
Е.А. Буровский \_\_\_\_\_ [подпись]

Москва, 2018

*Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения подразделения-разработчика программы.*



## 1 Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности. Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов направления 01.03.04 «Прикладная математика» подготовки бакалавра, изучающих дисциплину «Алгебраические методы решения динамических систем».

Программа разработана в соответствии с

- Образовательным стандартом Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» по направлению подготовки 01.03.04 «Прикладная математика», квалификация: бакалавр
- Образовательной программой «Прикладная математика» направления 01.03.04 «Прикладная математика» подготовки бакалавра
- Объединенным учебным планом университета по образовательной программе 01.03.04 «Прикладная математика» подготовки бакалавра, утвержденным в 2018 г.

## 2 Цели освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины «Алгебраические методы решения динамических систем» является изучение эффективных алгебраических алгоритмов вычисления точных и приближенных решений линейных и нелинейных динамических систем, а также простейших квантовых систем.

## 3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен

Знать:

- основные методы использования матричных алгебр для моделирования линейных динамических систем;
- общий алгебраический метод усреднения для анализа динамики линейных систем на больших временах;
- метод сведения нелинейных динамических систем к линейным;
- базовые формулы некоммутативного анализа.

Уметь:

- проводить приближенные преобразования возмущенных динамических систем к усредненной форме;
- анализировать усредненную систему методом редукции по алгебре симметрий.

Иметь навыки (приобрести опыт):

- решения динамических систем на больших временах с помощью алгебраического метода усреднения;
- вычисления спектра простейших квантовых систем алгебраическими методами;
- вычислений с некоммутирующими матрицами (операторами).

В результате освоения дисциплины студент приобретает следующие компетенции, необходимые для решения профессиональных задач (в соответствии с Образовательным стандартом НИУ ВШЭ):



Компетенция	Код компетенции по порядку	Код компетенции по ЕКК
Способен решать проблемы в профессиональной деятельности на основе анализа и синтеза.	УК-3	СК-Б4
Способен сформулировать инженерную задачу, формализовав ее на основе знаний математического аппарата и проведенного системного анализа	ПК-2	ИК-2
Способен применять знание фундаментальной математики и естественно-научных дисциплин при разработке математических моделей и методов для объектов, процессов и систем в инженерной практике	ПК-10	ИК-10
Способен использовать и развивать методы математического моделирования и применять аналитические и научные пакеты прикладных программ	ПК-11	ИК-11
Способен обоснованно выбирать, дорабатывать и применять для решения исследовательской задачи математические методы и модели, осуществлять проверку адекватности моделей, анализ и интерпретацию результатов, а также оценивать надежность и качество функционирования систем.	ПК-12	ИК-12

#### 4 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина является дисциплиной специализации «Математические и компьютерные методы для современных технологий» и относится к Вариативной части Профессионального цикла.

Изучение данной дисциплины базируется на следующих дисциплинах:

- «Математический анализ»
- «Линейная алгебра и геометрия»
- «Дифференциальные уравнения»
- «Уравнения математической физики».

Основные положения дисциплины могут быть использованы в дальнейшем при подготовке выпускной квалификационной работы.

#### 5 Тематический план учебной дисциплины

№	Название раздела	Всего часов	Аудиторные часы		Самостоятельная работа
			Лекции	Семинары	
1.	Алгебраические свойства линейных динамических систем	20	4	4	12
2.	Алгебраический метод усреднения для решения линейных динамических систем	36	8	8	20
3.	Алгебраический метод усреднения для решения нелинейных систем	64	16	16	32
4.	Базовые формулы некоммутативного анализа	32	12	12	8
	<b>Всего</b>	<b>152</b>	<b>40</b>	<b>40</b>	<b>72</b>



## 6 Формы контроля знаний студентов

Тип контроля	Форма контроля		4 модуль	Параметры
Текущий	Домашнее задание		Должно быть <b>4 единицы домашних заданий и/или контрольных</b>	Письменная самостоятельная работа
Итоговый	Экзамен		В конце модуля	Экзамен в устной форме

## 7 Критерии оценки знаний, навыков

### 7.1 Активность студентов во время аудиторных занятий.

Во время проведения семинаров преподаватель оценивает активность студентов по их участию в дискуссиях на предложенные темы, а также учитывается работа студентов у доски (правильность решения задач, самостоятельность при выборе метода решения и т.д.)

### 7.2 Экзамен.

Экзаменационное задание включает 1 теоретический вопрос и 1 задачу. При ответе на теоретический вопрос студент должен продемонстрировать знание определений и формулировок утверждений и теорем, при необходимости приводить доказательства. Также студент должен продемонстрировать умение применять теоретические знания для решения задач.

## 8 Содержание дисциплины

### Раздел 1. Алгебраические свойства линейных динамических систем.

1. Общие линейные динамические системы; система типа «хищник-жертва». Алгебры Ли и алгебры Йордана. Матрицы Паули и Дирака. Экспоненциальная функция на матричной алгебре. Элементарная теория возмущений для динамических систем. (2 ч. лек. + 2 ч. сем.)
2. Коммутирующие и некоммутирующие матрицы; свободная и запутанная динамика. Группа 3D-поворотов. Неавтономные динамические системы. Моделирование неавтономных вращений с помощью комплексификации алгебры. (2 лек. + 2 сем.)

### Раздел 2. Алгебраический метод усреднения для решения линейных динамических систем.

3. Обратимые преобразования динамических систем и оператор коммутирования на матричной алгебре. Спектральное разложение матрицы и ее присоединенного оператора коммутирования. Коммутант матрицы и вырождение спектра. (2 лек. + 2 сем.)
4. Теория возмущений в алгебре матриц. Как сделать матрицы коммутирующими? Гомологические уравнения. Динамическое решение гомологических уравнений. (4 лек. + 4 сем.)
5. Эволюция возмущенных линейных систем на больших временах. Поправки первого и второго порядка. Некоммутативная группа линейных преобразований трехмерного пространства и потеря баланса в моделях типа «хищник-жертва». (2 лек. + 2 сем.)



### Раздел 3. Алгебраический метод усреднения для решения нелинейных систем.

6/ Сведение нелинейных динамических систем к линейным. Алгебра Ли векторных полей. Гамильтоновы системы. Скобки Пуассона. Решение на больших временах возмущенных нелинейных систем. Периодические траектории и резонансы.

(8 лек. + 8 сем.)

7/ Редукция усредненной системы по некоммутативной алгебре симметрий. Пример: двумерный изотропный осциллятор с ангармоническим возмущением; симметрии Швингера; редукция к волчку Эйлера и уравнению Риккати.

(8 лек. + 8 сем.)

### Раздел 4. Базовые формулы некоммутативного анализа.

8. Функции от некоммутирующих матриц. Разностные производные и формулы некоммутативного анализа. Формула Кэмпбелла-Хаусдорфа.

(6 лек. + 6 сем.)

9. Парадоксы некоммутативности. Неравенство Вейля и соотношение неопределенности Гейзенберга. Алгебраическое вычисление спектра квантового осциллятора. Символы операторов. Коммутатор и скобки Пуассона.

(6 ч. лек. + 6 ч. сем.)

Итого: 40 ч. лекций, 40 ч. семинары.

## 9 Образовательные технологии

Рекомендуемые образовательные технологии:

- чтение лекций;
- проведение семинаров;
- выполнение студентами домашнего задания и другой самостоятельной работы;
- проведение экзамена.

Аудиторные занятия проводятся в форме лекций и семинаров. Во время проведения аудиторных занятий используются активные и интерактивные формы (обсуждение отдельных разделов дисциплины и методов решения задач, предложенных преподавателем; выбор вариантов задач в рамках конкретных тем домашних заданий и т.д.).

Самостоятельной работой студентов является выполнение домашних заданий, проработка материалов лекций и семинаров, подготовка к экзамену. Для успешного освоения дисциплины студентам рекомендуется выполнять полученные задания и изучать соответствующие разделы указанной в программе курса литературы.

Для обеспечения интерактивного и непрерывного учебного процесса, в качестве образовательных технологий широко используются коммуникационные средства, предоставляемые сетью «Интернет», в частности, студентам обеспечивается доступ к современной научной литературе в рамках изучаемого курса, осуществляется информационный обмен посредством электронной почты.

## 10 Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

### 10.1 Тематика заданий текущего контроля

Для текущего контроля в РУП предусмотрено одно домашнее задание.

Задание содержит 1 задачу. Выдается в *третьем модуле* на 10-ой неделе курса. Выполненное задание в письменном виде сдается студентами на 13-ой неделе курса.



### Примерные темы домашних заданий:

Вычислить экспоненту от трехмерной кососимметрической матрицы, от матриц Паули и Дирака. Вычислить спектр и собственные проекторы этих матриц.

Указать формулу, которая с квадратичной точностью дает решение линейной динамической системы на больших временах.

Найти соотношения в алгебре, порожденной генераторами трехмерных вращений, и указать оператор Казимира для этой алгебры.

Найти генераторы и коммутационные соотношения алгебры симметрий двумерного осциллятора в случае резонанса 1: 2.

### 10.2 Вопросы для оценки качества освоения дисциплины.

Экзаменационное задание включает 1 теоретический вопрос и 1 задачу.

Примерный список вопросов для подготовки к экзамену:

1. Линейные динамические системы и экспоненциальная функция на матричной алгебре. Элементарная теория возмущений для динамических систем.
2. Неавтономные динамические системы и их возмущение.
3. Алгебраическое преобразование возмущенной линейной системы к коммутативной форме и асимптотика решения на больших временах.
4. Спектральное разложение матрицы и ее присоединенного оператора коммутирования. Коммутант матрицы и вырождение спектра.
5. Теория возмущений в алгебре матриц. Как сделать матрицы коммутирующими? Гомологические уравнения.
6. Динамическое решение гомологических уравнений.
7. Сведение нелинейных динамических систем к линейным. Алгебра Ли векторных полей.
8. Решение гомологических уравнений и асимптотика решения на больших временах возмущенных нелинейных систем.
9. Гамильтоновы системы. Скобки Пуассона. Решение на больших временах возмущенных гамильтоновых систем.
10. Периодические траектории и резонансы. Редукция усредненной системы по некоммутативной алгебре симметрий.
11. Двумерный изотропный осциллятор с ангармоническим возмущением; симметрии Швингера; редукция к волчку Эйлера.
12. Двумерный изотропный осциллятор с ангармоническим возмущением; редукция к уравнению Риккати.
13. Функции от нескольких некоммутирующих матриц. Простейшие правила исчисления. Разностные производные и формул Ньютона.
14. Формула коммутации и смены порядка некоммутирующих матриц.
15. Формула Кэмпбелла-Хаусдорфа.
16. Континуальная версия формула Кэмпбелла-Хаусдорфа.
17. Коммутационное соотношение Гейзенберга и парадокс: «доказательство» соотношения  $0=1$ .
18. Неравенство Вейля и соотношение неопределенности Гейзенберга.
19. Алгебраическое вычисление спектра и собственных векторов квантового осциллятора.
20. Символы квантовых операторов. Коммутатор и скобки Пуассона.



## 11 Порядок формирования оценок по дисциплине

Оценки по всем формам текущего и итогового контроля выставляются по 10-ти балльной шкале.

Накопленная оценка определяется следующим образом:

$$O_{\text{накопл.}} = 0,5 (O_{\text{д.з.}} + O_{\text{ауд.}}), \text{ где}$$

$O_{\text{ауд.}}$  - оценка активности во время аудиторных занятий,

$O_{\text{д.з.}}$  - оценка за выполнение домашней работы студента.

Результирующая оценка за дисциплину рассчитывается следующим образом:

$$O_{\text{результ}} = 0,4 O_{\text{накопл}} + 0,6 O_{\text{экс.}}, \text{ где}$$

$O_{\text{экс.}}$  - оценка за экзамен.

Накопленная и результирующая оценки округляются арифметическим способом.

## 12 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### 12.1 Базовые учебники

1. А. Найфэ. Введение в методы возмущений. М. «Мир», 1984 г.
2. Р. Беллман Введение в теорию матриц. «Мир», 1990 г.

### 12.2 Основная литература

1. Т. Като. Теория возмущений линейных операторов. «Наука», 1972 г.
2. В.Н. Богаевский, А.Я. Познер. Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений. «Наука», 1987 г.
3. Е.А. Гребеншиков, М.Н. Киоса, С.В. Миронов. Численно-аналитические методы исследования регулярно-возмущенных многочастотных систем. Изд-во МГУ, 1986 г.
4. А.М. Переломов. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. «Наука», 1990 г.
5. В.И. Арнольд. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. «Наука», 1978 г.

### 12.3 Дополнительная литература

1. Г.Е.О. Джакаля. Методы теории возмущений для нелинейных систем. «Наука», 1979 г.
2. М.В. Карасев. Задачник по операторным методам. Изд-во МИЭМ, 1979 г.

### 12.4 Дистанционная поддержка дисциплины

Для обеспечения интерактивного и непрерывного учебного процесса в качестве образовательных технологий используются коммуникационные средства, предоставляемые сетью Интернет, в частности, осуществляется информационный обмен посредством электронной почты.

## 13 Материально-техническое обеспечение дисциплины

Не предусмотрено.