



**Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
"Национальный исследовательский университет  
"Высшая школа экономики"**

Факультет экономических наук

**Программа дисциплины  
Математика для экономистов**

для направления 38.04.01 - Экономика  
подготовки магистра  
Магистерские программы « Экономика: исследовательская программа»  
и  
«Прикладная экономика»

Разработчики программы: д.э.н. проф. М.И. Левин [mlevin@hse.ru](mailto:mlevin@hse.ru)  
к.ф.-м.н. доц. К.А. Букин [kbukin@hse.ru](mailto:kbukin@hse.ru)

Одобрена Департаментом теоретической экономики «\_\_» августа 2018 г.  
Руководитель департамента С.Э. Пекарский

Рекомендована Академическим советом образовательной программы  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 г. № протокола \_\_\_\_\_

Утверждена «\_\_» \_\_\_\_\_ 2018г.  
Академический руководитель образовательной программы \_\_\_\_\_

Москва, 2018



*Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями универ-  
ситета и другими вузами без разрешения кафедры-разработчика программы.*

## 1 Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает требования к знаниям и умениям студента, обучающегося по программе с повышенным теоретическим наполнением, и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов направления подготовки/ специальности 38.04.01 «Экономика», обучающихся по магистерской программе «Экономика: исследовательская программа», изучающих дисциплину «Математика для экономистов».

Программа разработана в соответствии с:

- Образовательным стандартом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”»;
- Образовательной программой «Экономика»;
- Рабочим учебным планом по направлению 38.04.01 «Экономика» подготовки магистра, утвержденным в 2018 г.

## 2 Цели освоения дисциплины

Цели освоения дисциплины Инструментальные методы в микроэкономическом анализе:

- освежить полученные ранее знания;
- выявить и исправить возможные пробелы;
- подготовить студентов к использованию математики на более высоком уровне, в частности при изучении микро- и макроэкономики магистерского уровня.

## 3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен:

- знать основные разделы аппарата современного микроэкономического моделирования;
- обладать навыками микроэкономического моделирования;
- уметь интерпретировать полученные результаты.

В результате освоения дисциплины студент осваивает следующие компетенции:

| Компетенция                                                                                               | Код по ФГОС/ НИУ | Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)                 | Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| Способен предлагать концепции*, модели, изобретать и апробировать способы в профессиональной деятельности | СК-М2            | Умение строить модели на основе вербального описания экономической ситуации и решать задачи | Работа на семинарских занятиях, подготовка к написанию контрольной работы   |
| Способен анализировать, верифицировать, оцени-                                                            | СК-М6            | Умение находить необходимые источники, работать с ними при                                  | Самостоятельная работа с источниками при подго-                             |



| Компетенция                                                                                                                                                               | Код по ФГОС/ НИУ | Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата) | Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|-----------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| ввать полноту информации в ходе профессиональной деятельности, при необходимости восполнять и синтезировать недостающую информацию и работать в условиях неопределенности |                  | самостоятельном освоении курса                                              | товке к контрольной работе                                                  |
| Восприятие текстов, сообщений <ul style="list-style-type: none"><li>письменно</li></ul>                                                                                   | ИК-М 2.1.2 (Э)   | Умение воспринимать информацию для освоения курса                           | Работа в течение семестра                                                   |
| Способен описывать проблемы и ситуации экономической деятельности, используя язык и аппарат математических наук                                                           | ИК-М5.2 (Э)      | Умение использовать полученные знания для решения экономических задач       | Решение задач на семинарах и написание контрольной работы                   |

#### 4 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина относится к базовым инструментальным методам, используемым в микро и макроанализе.

Изучение данной дисциплины базируется на следующих дисциплинах:

- Линейная алгебра
- Математический анализ
- Дифференциальные уравнения

Для освоения учебной дисциплины, студенты должны владеть следующими знаниями и компетенциями:

- Владение базовым математическим аппаратом.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

- Микроэкономика
- Макроэкономика
- Эконометрика
- Специальные дисциплины, как то: экономика труда, поведенческая экономика, экономика развития и др.

#### 5 Тематический план учебной дисциплины

| № | Название темы | Всего часов по дисциплине | Аудиторные часы | Самостоятельная работа |
|---|---------------|---------------------------|-----------------|------------------------|
|---|---------------|---------------------------|-----------------|------------------------|



|   |                                                                                                       |     |    |     |
|---|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|----|-----|
| 1 | <u>Раздел I.</u> Множества и их свой-<br>ства                                                         | 16  | 8  | 10  |
| 2 | <u>Раздел II.</u> Линейная алгебра                                                                    | 32  | 16 | 20  |
| 3 | <u>Раздел III.</u> Функции и их свой-<br>ства                                                         | 32  | 16 | 20  |
| 4 | <u>Раздел IV.</u> Оптимизация                                                                         | 48  | 24 | 30  |
| 5 | <u>Раздел V.</u> Теория оптимального<br>управления и ее приложения для<br>решения экономических задач | 64  | 32 | 40  |
|   | <b>Итого:</b>                                                                                         | 192 | 96 | 120 |

## 6 Формы контроля знаний студентов

| Тип кон-<br>троля       | Форма кон-<br>троля   |   |   |   |   | Длительность контрольных меро-<br>приятий |
|-------------------------|-----------------------|---|---|---|---|-------------------------------------------|
|                         |                       | 1 | 2 | 3 | 4 |                                           |
| Проме-<br>жуточ-<br>ный | Контрольная<br>работа | * |   |   |   | письменная работа 80 минут                |
| Итого-<br>вый           | Контрольная<br>работа |   | * |   |   | письменная работа 120 минут               |

- текущий контроль осуществляется путем регулярного решения задач на занятиях;
- студенты должны выполнить два домашних задания в течение двух модулей;
- промежуточный контроль осуществляется в форме контрольной работы в конце 1-го мо-  
дуля;
- итоговый контроль – в форме контрольной работы в конце 2-го модуля.

## 7 Определение результирующей оценки

Итоговая оценка вычисляется по накопительной формуле:  $O_{\text{накопл}} = 0,2O_{\text{ДЗ}} + 0,25O_1 + 0,55O_2$ ,  
в которой  $O_{\text{ДЗ}}$ , среднее арифметическое оценок за домашние задания и  $O_1, O_2$ , оценки за  
контрольные работы. Оценки за контрольные не являются блокирующими.

## 8 Содержание дисциплины

### Раздел I. МНОЖЕСТВА И ИХ СВОЙСТВА

- 1.1. Геометрия и топология  $n$ -мерного вещественного пространства.
- 1.2. Выпуклость множеств.
- 1.3. Теоремы отделимости.

### Раздел II. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

- 2.1. Матричная алгебра.
- 2.2. Линейные пространства и подпространства. Линейные операторы. Их свойства.



- 2.3. Методы решений систем линейных уравнений.
- 2.4. Квадратичные формы. Знакоопределенность квадратичных форм.
- 2.5. Эвклидовы пространства. Ортогонализация.

### **Раздел III. ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА**

- 3.1. Теорема о неявной функции.
- 3.2. Монотонность.
- 3.3. Выпуклость, вогнутость.
- 3.4. Квазивыпуклость, квазивогнутость.

### **Раздел IV. СТАТИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ**

- 4.1. Безусловная оптимизация
- 4.2. Условная оптимизация. Основные постановки задач.
- 4.3. Метод множителей Лагранжа.
- 4.4. Теорема Куна-Таккера.
- 4.5. Оптимизация с параметрами. Теорема о максимуме. Теорема об огибающей.
- 4.6. Многокритериальная оптимизация. Парето-эффективные решения.

### **Раздел V. ДИНАМИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ**

- 5.1. Основные задачи вариационного исчисления.
- 5.2. Необходимые условия решения задачи оптимального управления.
- 5.3. Условия трансверсальности.
- 5.4. Задачи динамического программирования. Уравнение Беллмана.
- 5.5. Применение аппарата динамической оптимизации для решения экономических задач.

## **9 Примеры заданий промежуточного /итогового контроля**

1. Исследуйте на выпуклость/вогнутость следующие функции:

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 - 3y;$$

$$f(x, y, z) = x^2 - 4xyz - 4y^2 + 2xz + 4yz.$$

2. Рассмотрите следующие множества:

1)  $S = \{x \in S : 0 < x_1 < 1, x_2 = 2x_1\},$

2)  $\tilde{S} = \{x \in \tilde{S} : 0 \leq x_1 \leq 1, x_2 \leq \sqrt{x_1}\},$

**и ответьте на вопросы, касающиеся каждого из данных множеств:**

- (i) Верно ли, что любая точка множества является внутренней?
- (ii) Верно ли, что все граничные точки множества принадлежат этому множеству?
- (iii) Приведите примеры, если таковые существуют, крайних точек множества.
- (iv) Является ли данное множество выпуклым?
- (v) Является ли данное множество замкнутым?
- (vi) Является ли данное множество ограниченным?

3. Выполните следующие задания:



(а) Приведите определение квазивогнутой функции.

(б) Рассмотрите нижеследующие функции.

1)  $f(x, y) = 2\sqrt{x} + \sqrt{y}$ ;

2)  $f(x, y) = 2x + y^2$ ;

где  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ .

Используя графический анализ, определите, являются ли следующие функции квазивогнутыми/квазивыпуклыми.

4. (а) Докажите, что множество точек минимума выпуклой функции, заданной на выпуклом множестве, выпукло.

(б) Докажите, что если функция  $f(x)$ - строго выпуклая функция, заданная на выпуклом множестве, то ее минимум единственен.

5. Потребитель с функцией полезности  $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_1 x_2$  имеет доход 100. Цены благ  $x_1$  и  $x_2$  4 и 5, соответственно.

а) Найдите оптимальный набор потребителя.

б) Потребителю предлагают следующий вариант роста его благосостояния. Заплатив некоторую сумму  $a$  правительству, потребитель получает талоны, по которым он покупать первое благо по цене 3. Цена второго блага остается неизменной. Для каких значений  $a$  потребитель согласится на это предложение?

6. Минимизируйте функцию  $f(x, y) = x^n + y^n$ , ( $n > 1$ ) при условии, что  $x + y = s$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $s$  — положительный параметр. Проверьте условия второго порядка. Используя полученный вариант, докажите неравенство  $\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x + y}{2}\right)^n$  для значений  $x, y, n$  заданных выше.

7. Рассмотрите игру, где две фирмы-дуополисты одновременно принимают решение об объеме выпускаемой продукции. Опишите равновесие по Нэшу в данной игре и проиллюстрируйте его графически.

8. Опишите равновесие по Нэшу и проиллюстрируйте его графически, если одна из фирм-дуополистов первой принимает решение об объеме выпускаемой продукции, а затем вторая фирма решает, какой объем ей произвести.

## 10 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### 10.1 Базовые учебник и задачник.

1. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ (в 2-х томах). М.: Издательство «Высшая школа», 1973 и более поздние издания.



2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1997.

## 10.2 Основная литература

1. Carl P. Simon, Lawrence Blume, Mathematics for economists, W.W. Norton company Inc., 1994 or latest edition.
2. Kamien, M.I., Schwartz, N.L. Dynamic optimization: the calculus of variations and optimal control in economics and management, 2nd ed. New York: North-Holland, 1991 and latest edition.
3. Rangarajan K. Sundaram. A first course in optimization theory, Cambridge University Press, 1996, 11th printing in 2007
4. Berkovitz L.D. Convexity and Optimization in R-n, Wiley, 2002.
5. Э.М. Браверман, Математические методы планирования и управления в экономических системах. «Наука», Москва, 1976 г.

## 10.3 Дополнительная литература

1. A.Mas-Colell, M.D.Whinston, J.R.Green, Microeconomic Theory, New York, Oxford University Press, 1995
2. G. Jehle, P. Reny, Advanced Microeconomic Theory, 2nd edition, Addison-Wesley, 2000
3. М. Интрилигатор, Математические методы оптимизации и экономическая теория, 2-ое издание, Москва, Айрис Пресс, 2002
4. Varian H., Microeconomic Analysis, 3rd edition, W.W.Norton & Company, New York, London, 1992
5. В. П. Бусыгин, Е. В. Желободько, А. А. Цыплаков, Микроэкономика – третий уровень Москва, ГУ – ВШЭ, 2006

### Методические рекомендации преподавателю:

В освоении курса важную роль играет приобретения навыка решения задач, что является одной из основных задач практических занятий. Задачи должны быть разнообразны: необходимо, чтобы студенты не только овладеть определенными инструментами микроэкономического моделирования, но и научились использовать их при исследовании экономических моделей. Следует также уделять внимание интерпретации полученных результатов.

### Методические указания студентам:

Для успешного усвоения курса необходимо не только посещать лекции, но и активно готовиться к ним. В частности, целесообразно перед каждой лекцией просматривать основные определения и факты по темам лекций.



Значительное время следует посвящать решению задач, предлагаемых на занятиях. Обучение посредством решения задач является гораздо лучшей стратегией, чем многократное перечитывание теории (хотя, конечно, знание теоретических основ является предпосылкой успешного решения задач). Как написано в предисловии к одной математической книге, «научиться решению уравнений, глядя, как их решают другие, так же невозможно, как научиться живописи, глядя, как рисует художник».