



Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
Программа дисциплины «Теория вероятностей» для образовательной программы
«Экономика и статистика» направления 38.03.01 «Экономика» подготовки бакалавра

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
"Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"**

Факультет экономических наук
Департамент статистики и анализа данных

**Рабочая программа дисциплины
"Теория вероятностей"**

для образовательной программы «Экономика и статистика»
направления подготовки 38.03.01 «Экономика»
уровень бакалавр

Разработчик программы

Миронкина Ю.Н. к.т.н. доцент ymironkina@hse.ru

Одобрена на заседании Департамента статистики и анализа данных
«__» _____ 2018 г.

Руководитель департамента

Мхитарян В.С. _____ [подпись]

Утверждена Академическим советом образовательной программы
«__» _____ 2018 г., № протокола _____

Академический руководитель образовательной программы
Сиротин В.П. _____ [подпись]

Москва, 2018

Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения подразделения-разработчика программы.

1 Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает требования к образовательным результатам и результатам обучения студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих дисциплину "Теория вероятностей", учебных ассистентов и студентов направления подготовки 38.03.01 "Экономика", обучающихся по образовательной программе "Экономика и статистика".

Программа учебной дисциплины разработана в соответствии с:

- [Образовательным стандартом НИУ ВШЭ](#) по направлению подготовки 38.03.01 "Экономика" (утвержден Ученым советом Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», Протокол от 28.11.2014 № 8);
- Образовательной программой "Экономика и статистика" направления подготовки 38.03.01 "Экономика".
- [Рабочим учебным планом](#) университета образовательной программы "Экономика и статистика" для 2 курса на 2018/2019 учебный год, утвержденным 02.02.2018 г.
- [Концепцией образовательной программы «Экономика и статистика», утвержденной академическим руководителем ОП 27.02.2017 г.](#)
- [Матрицей компетенций образовательной программы «Экономика и статистика», утвержденной академическим руководителем ОП 27.02.2017 г.](#)

2 Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины "Теория вероятностей" являются формирование у студентов научного представления о случайных событиях и величинах, о методах их исследования, а также вероятностно-статистического мышления, необходимого для успешной исследовательской и аналитической работы в современных областях социально-экономической и управленческой деятельности.

3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

Уровни формирования компетенций (УФК):

РБ — ресурсная база, в основном теоретические и предметные основы (знания, умения);

СД – способы деятельности, составляющие практическое ядро данной компетенции;

МЦ – мотивационно-ценностная составляющая, отражает степень осознания ценности компетенции человеком и готовность ее использовать.

В результате освоения дисциплины студент осваивает компетенции:



Компетенция	Код по ОС ВШЭ	УФК	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции	Форма контроля уровня сформированности компетенции
Способность учиться, приобретать новые знания, умения, в том числе в области, отличной от профессиональной	УК-1	РБ	Знает основные термины, определения, теоремы и понятия теории вероятностей. Знает принципы расчета вероятностей случайных событий, виды случайных величин и способы их задания, методы расчета функций распределения и ряда распределения/ функций плотности вероятностей, числовых характеристик случайных величин, основные законы распределения случайных величин, многомерные случайные величины и их свойства.	Лекции, освещающие теоретическое содержание курса, сопровождаются рассмотрением различных примеров решения задач, демонстрацией графических и видеоматериалов, иллюстрирующих теоретические вероятностные понятия и модели. Семинары, посвященные решению большого числа разнообразных вероятностных задач по всем темам курса, разбору домашних еженедельных заданий и возникших у студентов вопросов. Консультации для подготовки и разбора аудиторных контрольных работ, ответов на вопросы студентов	Еженедельные групповые домашние задания, индивидуальные домашние задания и аудиторные контрольные работы по каждому разделу курса, итоговая аудиторная контрольная работа
Способность выбирать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы.	ПК-12	РБ	Умеет в соответствии с поставленной задачей определить вероятностную модель, тип случайной величины, определить основные функции, ее задающие и рассчитать числовые характеристики, сделать вероятностные выводы о возможных значениях случайных величин	Семинары с решением и разбором большого количества вероятностных задач по всем темам, индивидуальные домашние задания. Консультации для подготовки и разбора аудиторных контрольных работ, ответов на вопросы студентов	Индивидуальные домашние задания и аудиторные контрольные работы по каждому разделу курса, итоговая аудиторная контрольная работа
Способность на основе описания экономических процессов и явлений строить теоретические и эконометрические модели, анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты.	ПК-13	РБ	Умеет составлять и решать различные вероятностные задачи, использовать методы анализа случайных событий и случайных величин в практических задачах	Семинары с решением и разбором большого количества вероятностных задач по всем темам, индивидуальные домашние задания. Консультации для подготовки и разбора аудиторных контрольных работ, ответов на вопросы студентов	Индивидуальные домашние задания и аудиторные контрольные работы по каждому разделу курса, итоговая аудиторная контрольная работа



Компетенция	Код по ОС ВШЭ	УФК	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции	Форма контроля уровня сформированности компетенции
Способность использовать для решения аналитических и исследовательских задач современные технические средства и информационные технологии.	ПК-17	РБ, СД	Демонстрирует умение работать с компьютером и осуществлять поиск информации в сети интернет; использует пакеты программ для обработки массивов данных, графического представления результатов расчетов.	Лекции, семинары, консультации с обсуждением вопросов использования компьютерной техники в решении вероятностных задач.	Еженедельные групповые домашние задания, индивидуальные домашние задания.

4 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина относится к **профессиональному циклу (Major)** дисциплин (Б.Пр), его **базовой части (Б.Пр.Б)**.

Для всех специализаций образовательной программы «Экономика и статистика» настоящая дисциплина является **базовой**.

Изучение данной дисциплины базируется на следующих дисциплинах:

- Математический анализ;
- Линейная алгебра.

Для освоения учебной дисциплины студенты должны владеть следующими знаниями и компетенциями:

- Знать основы математического анализа, в т.ч. уметь находить пределы числовых функций, производные основных элементарных функций, сложных функций, точки экстремума числовой функции, разложение функции в ряд Тейлора, знать основы интегрального исчисления, основные методы интегрирования, уметь находить первообразные основных функций, определенные интегралы (в том числе двойные), знать основы анализа числовых рядов и т.п.
- Знать основы линейной алгебры, в т.ч. матрицы и их основные числовые характеристики, преобразования и матричные операции, уметь решать системы линейных уравнений и т.п.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении дисциплин:

- Математическая статистика;
- Эконометрика;
- Микроэкономическая статистика;
- Макроэкономическая статистика;
- Многомерные статистические методы;
- Теория игр;



- Случайные процессы;
- Страхование и актуарные расчеты;
- Статистическое моделирование социально-экономических процессов;
- Интеллектуальные методы анализа информации;
- Современные технологии обработки статистических данных;
- Актуарные расчеты в страховании жизни и др.

5 Тематический план учебной дисциплины

№ те-мы	Название раздела	Всего часов	Аудиторные часы		Самостоя-тельная работа
			Лек-ции	Семи-нары	
	Раздел 1. Случайные события	100	16	24	60
1	Случайные события и их вероятности. Комбинаторика	38	6	8	24
2	Теоремы сложения и умножения вероятностей	28	2	6	16
3	Формула полной вероятности и формула Байеса	14	2	4	8
4	Повторные независимые испытания	20	4	6	12
	Раздел 2. Случайные величины	128	22	30	76
5	Дискретная случайная величина	22	6	6	12
6	Непрерывная случайная величина	22	6	6	12
7	Нормальный закон распределения	16	2	4	8
8	Закон больших чисел и предельные теоремы	20	4	4	12
9	Производящие и характеристические функции	26	4	6	16
10	Многомерная случайная величина	22	2	4	16
	Итого:	228	38	54	136



6 Формы контроля знаний студентов

Тип контроля	Форма контроля	1 год		Параметры (регламент проведения контроля)
		модуль		
		1	2	
Текущий	Домашние задания	*	*	Еженедельные домашние задания, выдаваемые всей группе, выборочно проверяются преподавателем у студентов
Промежуточный	Индивидуальная домашняя контрольная работа по 1 разделу	* 7-8 неделя		Индивидуальная домашняя контрольная работа по вариантам (выдаваемым преподавателем), состоящая из 7 задач на 1-4 темы курса. Оценивается правильность и обоснованность решения, оформление решения с использованием требуемой вероятностной терминологии (обоснование применения соответствующих формул, теорем и т.д.)
	Аудиторная контрольная работа по 1 разделу	* 7-8 неделя		Письменная работа на 1 пару (80 минут) на 1-4 темы курса. Разрешается использование любых собственных материалов – тетрадей, учебников и т.п. (за исключением источников сети Интернет с помощью электронных устройств)
	Индивидуальная домашняя контрольная работа по 2 разделу		* 13-14 неделя (1 часть на 5-9 темы), 16-17 неделя (2 часть на 10 тему)	Индивидуальная домашняя контрольная работа по вариантам (выдаваемым преподавателем), состоящая из 8 задач на 5-10 темы курса. Сдается в два этапа: на темы 5-9 на 13-14 неделе, последние 2 задачи на 10 тему – на последней неделе семестра (16-17 неделя). Оценивается правильность и обоснованность решения, оформление решения с использованием требуемой вероятностной терминологии (обоснование применения соответствующих формул, теорем и т.д.)
	Аудиторная контрольная работа по 2 разделу		* 13-14 неделя	Письменная работа на 1 пару (80 минут) на 5-9 темы курса. Разрешается использование любых собственных материалов – тетрадей, учебников и т.п. (за исключением источников сети Интернет с помощью электронных устройств)
Итоговый	Экзамен		* зачетная неделя модуля	Письменная работа, включающая как теоретические вопросы и доказательства, так и расчетные задачи по всем темам курса на 150 минут. Не разрешается использование никаких материалов за исключением 1-2 листов формата А4 с основными формулами по курсу без пояснений (допускается как рукописный, так и печатный вариант) и статистических таблиц.



На всех аудиторных контрольных работах и экзамене разрешается использование калькулятора (обычного, инженерного или научного (научный является наиболее удобным для расчетов)) и не разрешается использование телефонов, смартфонов, планшетов и др. электронных устройств.

Задержка объявленных сроков сдачи индивидуальных домашних работ влечет штрафные санкции – 10% от максимального балла за работу (1 балл) за каждую неделю просрочки.

7 Критерии оценки знаний, навыков

Оценки по всем формам текущего, промежуточного и итогового контроля выставляются по 10-ти балльной шкале. Оценивается правильность и обоснованность решений, правильность оформления с использованием вероятностных формул. Каждая задача (или пункты задачи, если они имеют отдельный вес) оценивается отдельно, в соответствии со своим весом, по шкале с 6-ю градациями (таблица 1) или в виде числа.

Таблица 1

Шкала градаций оценивания отдельных задач в контрольных работах всех форм контроля по дисциплине

Обозначение	Доля от максимального балла за задачу	Критерий выставления оценки
+	1	Решение задачи полностью верное и обоснованное
+. .	0,8	Имеются небольшие замечания к оформлению или решению (задача решена на 80%)
+/-	0,6	Имеются замечания к оформлению и/или решению (задача решена на 60%)
-/+	0,4	Имеются существенные замечания к оформлению и решению (задача решена на 40%)
-. .	0,2	Задача почти не решена, имеются некоторые правильные наработки в ее решении (задача решена на 20%)
-	0	Полностью неверное решение

Итоговая оценка выставляется по 10-ти балльной шкале путем суммирования всех баллов (без округления) за отдельные задачи.

Все оценки промежуточного и итогового контроля участвуют в формировании оценки за курс без округлений, округляется только итоговая оценка за курс перед выставлением в ведомость. Правила округления – математические.

8 Содержание дисциплины

Раздел I. Случайные события

Тема 1. Случайные события и их вероятности

Всего: 38 часов, из них – 6 часов лекций, 8 часов семинаров, 24 часа самостоятельной работы



Предмет теории вероятностей. Случайные события. Классификация событий. Операции над случайными событиями и их свойства. Геометрическая интерпретация действий над случайными событиями с помощью диаграмм Эйлера-Венна. Вероятность события. Дискретное вероятностное пространство. Классическое определение вероятности и область его применимости. Элементы комбинаторики. Статистическое определение вероятности. Непрерывное вероятностное пространство. Геометрическое определение вероятности и область его применимости. Понятие об аксиоматике А.Н.Колмогорова. Аксиоматическое определение вероятности. Алгебра событий. Поле вероятностей, σ -алгебра событий.

Тема 2. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Всего: 28 часов, из них – 2 часа лекций, 6 часов семинаров, 16 часов самостоятельной работы

Теоремы сложения вероятностей для несовместных случайных событий. Теоремы сложения вероятностей для двух, трех и n совместных случайных событий. Независимые и зависимые случайные события. Условная вероятность. Теоремы умножения для зависимых и независимых событий.

Тема 3. Формула полной вероятности и формула Байеса

Всего: 14 часов, из них – 2 часа лекций, 4 часа семинаров, 8 часов самостоятельной работы

Формула полной вероятности. Формула Байеса. Область применения и научное значение. Априорные и апостериорные вероятности.

Тема 4. Повторные независимые испытания

Всего: 20 часов, из них – 4 часа лекций, 6 часов семинаров, 12 часов самостоятельной работы

Повторные независимые испытания. Схема испытаний Бернулли. Формула Бернулли. Наивероятнейшее число успехов в испытаниях Бернулли. Частные и общие теоремы о повторении опытов с одинаковой и разными вероятностями исходов и с несколькими исходами. Асимптотические (приближенные) формулы для испытаний Бернулли. Приближение биномиального распределения при большом числе испытаний к нормальному. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа. Следствия из интегральной теоремы Муавра-Лапласа. Приближение формулы Бернулли при большом числе испытаний к формуле Пуассона. Теорема Пуассона. Условия применимости.

Литература по I разделу:

Базовый учебник:

1. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие/ Мхитарян В.С., Трошин Л.И., Астафьева Е.В., Миронкина Ю.Н./ под ред. В.С. Мхитаряна. – М.: Синергия, 2013, Главы 1-4.

Основная литература:

2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: «Академия», 2005, Главы 1-4.

3. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001, Главы 1-2.
4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей. – М.: Высшая школа, 2006. – Главы 1-4.

Дополнительная литература:

5. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. - М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – Главы 1-2.
6. Айвазян С. А., Мхитарян В. С. Прикладная статистика. Основы эконометрики. – Т.1: Теория вероятностей и прикладная статистика М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001.
7. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения (2 тома)*. М., Мир, 1964; Либроком, 2010 г. - Том 1, Введение, Главы I-V.
8. Виленкин Н. Я., Виленкин А. Н., Виленкин П. А. *Комбинаторика*. – М.: Наука, 1969. – 368 с., МЦНМО, ФИМА, 2010. – 400 с.
9. Виленкин Н.Я. *Популярная комбинаторика* – М.: Наука, 1969. – 209 с.
10. Мостеллер Ф., Рурке Р., Томас Дж. *Вероятность. / Пер. с англ.* - М., Мир, 1969. - Главы 1-4.
11. Коршунов, Д. А., Фосс, С. Г. Сборник задач и упражнений по теории вероятностей, Новосибирск, 1997. - Отдел I-II.
12. Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. Сборник задач по теории вероятностей. – М.: Наука, 1989. – Глава 1-2.
13. Paul Newbold, William L. Carlson, Betty M. Thorne. *Statistics for Business and Economics*. – 8th ed. Pearson, 2013. – Chapter 3.
14. Sheldon Ross. *A First Course in Probability*. – 5th ed. - Prentice Hall, 1997. - Chapters 1-3.
15. David Stirzaker. *Elementary Probability*. – 2nd ed. Cambridge University Press, 2003. - Chapters 0-3.
16. Geoffrey R. Grimmett, David R. Stirzaker. *One Thousand Exercises in Probability* – Oxford University Press, 2001. – Chapter 1.

и другие источники из списка литературы (см. п. 12 Программы)

Раздел II. Случайные величины

Тема 5. Дискретная случайная величина

Всего: 22 часа, из них – 6 часов лекций, 6 часов семинаров, 12 часов самостоятельной работы

Случайные величины. Виды случайных величин. Их сходства и отличия. Дискретная случайная величина. Ряд распределения дискретной случайной величины. Функция распределения дискретной случайной величины и её свойства. Основные числовые характеристики. Математическое ожидание случайной величины. Его свойства. Отличия для независимых и зависимых случайных величин в расчете математического ожидания их произведения. Дисперсия случайной величины. Её свойства. Отличия для независимых и зависимых случайных величин в расчете дисперсии их суммы. Среднее квадратическое отклонение. Понятие о центрированной и стандартной (нормированной) случайной величине. Начальные и центральные моменты k -го порядка случайной величины. Наиболее применимые ха-

рактические. Связь между ними. Коэффициенты асимметрии и эксцесса случайной величины. Мода и виды распределений, связанные с ней. Медиана. Квантили и квартили случайной величины. Их значение и интерпретация. Неоднозначность определения у дискретных случайных величин. Основные законы распределения дискретных случайных величин – биномиальный, пуассоновский, геометрический, гипергеометрический, отрицательный биномиальный. Ряды распределения, числовые характеристики, сходства и отличия друг с другом. Производящая функция неотрицательной целочисленной дискретной случайной величины. Определение, связь с рядом распределения, связь с моментами случайной величины. Вывод математического ожидания и дисперсии. Производящая функция суммы независимых случайных величин.

Тема 6. Непрерывная случайная величина

Всего: 22 часа, из них – 6 часов лекций, 6 часов семинаров, 12 часов самостоятельной работы

Непрерывная случайная величина. Функция распределения непрерывной случайной величины. Сходства и отличия функций распределений дискретных и непрерывных случайных величин. Теорема о вероятности отдельно взятого значения. Функция плотности вероятностей. Основные числовые характеристики – математическое ожидание и дисперсия, начальные и центральные моменты, мода, медиана, квантили, квартили, коэффициенты асимметрии и эксцесса случайной величины. Основные законы распределения непрерывных случайных величин – равномерный, логнормальный, экспоненциальный, гамма-распределение. Функции плотности вероятности и их свойства. Функции распределения. Их характеристики. Области применения. Характеристики формы кривой. Распределения Пирсона (χ^2), Стьюдента (t - распределение), Фишера-Снедекора (F -распределение). Связь с другими распределениями. Функции плотности вероятности. Математические ожидания и дисперсии.

Тема 7. Нормальный закон распределения

Всего: 16 часов, из них – 2 часа лекций, 4 часа семинаров, 8 часов самостоятельной работы

Нормальный закон распределения. Функция плотности вероятности – функция Гаусса - и её свойства. Характеристики формы кривой. Функция распределения. Функция Лапласа. Математическое ожидание и дисперсия нормальной случайной величины. Свойства случайной величины, имеющей нормальный закон распределения. Правило трёх сигм. Стандартный (нормированный) нормальный закон распределения и его свойства.

Тема 8. Закон больших чисел

Всего: 20 часов, из них – 4 часа лекций, 4 часа семинаров, 12 часов самостоятельной работы

Предельные теоремы теории вероятностей. Закон больших чисел. Лемма Маркова. Неравенство и теорема Чебышева. Условия применимости. Закон больших чисел в форме теоремы Маркова. Теорема Хинчина. Теорема Бернулли. Теорема Пуассона. Центральная

предельная теорема и её значение. Теорема Ляпунова (частный случай, классическая ЦПТ). Следствия. ЦПТ Линдеберга. ЦПТ Ляпунова.

Тема 9. Производящие и характеристические функции

Всего: 26 часов, из них – 4 часа лекций, 6 часов семинаров, 16 часов самостоятельной работы

Производящая функция (Probability-generating function, PGF) неотрицательной целочисленной дискретной случайной величины. Производящая функция моментов (Moment-generating function, MGF) для дискретной и непрерывной случайной величины. Производящая функция семиинвариантов (полуинвариантов, кумулянт) (semi-invariants, cumulants) случайной величины. Их основные свойства, связь с моментами случайной величины, использование при суммировании независимых случайных величин. Характеристическая функция (Characteristic function) случайной величины и ее основные свойства. Определение, основные свойства. Связь с распределением случайной величины. Обратное преобразование Фурье. Характеристическая функция случайной величины и ее связь с моментами случайной величины. Семиинварианты (полуинварианты) случайной величины и их свойства, использование для нахождения моментов случайной величины. Теорема о непрерывном соответствии.

Тема 10. Многомерная случайная величина.

Всего: 22 часа, из них – 2 часа лекций, 4 часа семинаров, 16 часов самостоятельной работы

Многомерная случайная величина. Основные понятия. Двумерные дискретные случайные величины. Одномерные (маргинальные) распределения. Условный закон распределения одной из одномерных составляющих двумерной дискретной случайной величины. Двумерные непрерывные случайные величины. Функция плотности вероятности двумерной непрерывной случайной величины и её свойства. Функция распределения двумерной случайной величины и её свойства. Плотности распределения отдельных величин, образующих двумерную непрерывную случайную величину (маргинальные распределения). Условный закон распределения одной из одномерных составляющих двумерной случайной величины. Выражение условных плотностей распределения через безусловные. Теорема умножения вероятностей/плотностей распределения для дискретных/непрерывных случайных величин. Независимость случайных величин. Связь между коррелированностью/некоррелированностью случайных величин и их зависимостью/независимостью.

Начальные и центральные моменты порядка $k+s$ двумерной случайной величины. Расчет для дискретных и непрерывных случайных величин. Наиболее применимая характеристика. Ковариация (корреляционный момент) двух случайных величин. Её свойства. Связь с математическим ожиданием произведения и дисперсией суммы случайных величин. Коэффициент корреляции и его свойства. Понятие некоррелированных случайных величин. Связь между коррелированностью/некоррелированностью случайных величин и их зависимостью/независимостью. Двумерный нормальный закон распределения. Его параметры. Функция плотности вероятности. Теорема о связи между некоррелированностью и независимостью двух нормально распределенных случайных величин.

Литература по II разделу:

Базовый учебник:

1. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие/ Мхитарян В.С., Трошин Л.И., Астафьева Е.В., Миронкина Ю.Н./ под ред. В.С. Мхитаряна. – М.: Синергия, 2013, Главы 5-8.

Основная литература:

2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: «Наука», 1969, «Академия», 2005, Главы 5-6, 8, 10, 12-13.
3. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001, Главы 3-6.
4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей. – М.: Высшая школа, 2006. – Главы 5-8.

Дополнительная литература:

5. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. - М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – Главы 4-8.
6. Айвазян С. А., Мхитарян В. С. Прикладная статистика. Основы эконометрики. – Т.1: Теория вероятностей и прикладная статистика М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001.
7. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения (2 тома)*. М., Мир, 1964; Либроком, 2010 г. - Том 1, Введение, Главы VI-XI.
8. Мостеллер Ф., Рурке Р., Томас Дж. *Вероятность. / Пер. с англ.* - М., Мир, 1969. - Главы 5-6.
9. Коршунов, Д. А., Фосс, С. Г. Сборник задач и упражнений по теории вероятностей, Новосибирск, 1997. - Отдел III, V-VI.
10. Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. Сборник задач по теории вероятностей. – М.: Наука, 1989. – Главы 3-4.
11. Paul Newbold, William L. Carlson, Betty M. Thorne. *Statistics for Business and Economics*. – 8th ed. Pearson, 2013. – Chapter 4-5.
12. Sheldon Ross. *A First Course in Probability*. – 5th ed. - Prentice Hall, 1997. - Chapters 4-8.
13. David Stirzaker. *Elementary Probability*. – 2nd ed. Cambridge University Press, 2003. - Chapters 4-8.
14. Geoffrey R. Grimmett, David R. Stirzaker. *One Thousand Exercises in Probability* – Oxford University Press, 2001. – Chapter 2-5.

и другие источники из списка литературы (см. п. 12 Программы)

9 Образовательные технологии

9.1 Методические рекомендации преподавателю

Чтение лекций желательно сопровождать презентацией, позволяющей существенно повысить качество и визуализировать подачу материала, разбором примеров и задач, облегчающих понимание материала.

Проведение семинаров должно максимально способствовать пониманию курса студентами, развивать умение решать ими разнообразные вероятностные задачи, выбирать нужные математические вероятностные модели, соответствующие представленным задачам. Целесообразно разбирать выданные домашние задания, чтобы ответить на все возникающие у студентов вопросы и решать разнообразные типы задач по каждой новой теме.

9.2 Методические указания студентам

Для успешного усвоения курса необходимо не только посещать лекции и семинарские занятия, но и активно готовиться к ним, стараться решать все задаваемые домашние задания, перед каждым занятием просматривать материалы лекций и дополнительно изучать учебники и решать задачи из задачников, предложенные в списке литературы.

10 Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

10.1 Оценочные средства для оценки качества освоения дисциплины в ходе текущего контроля

Вопросы для оценки качества освоения дисциплины

1. Какие виды случайных событий Вы знаете? Приведите примеры. Проиллюстрируйте с помощью диаграмм Эйлера-Венна.
2. Какие операции применимы к случайным событиям? Какими свойствами они обладают? Приведите примеры.
3. Какие способы расчёта вероятностей случайных событий Вы знаете? В каких случаях они применимы?
4. Чем отличаются и в чём схожи такие понятия комбинаторики, как сочетания, размещения и перестановки? Приведите примеры.
5. Чем отличаются совместные и несовместные события? Проиллюстрируйте с помощью диаграмм Эйлера-Венна.
6. Сформулируйте теорему сложения для совместных и несовместных событий.
7. Дайте определение независимых и зависимых событий. Сформулируйте теоремы умножения.
8. В каких случаях применяется формула полной вероятности? Каким свойствам должны удовлетворять гипотезы?
9. Что такое априорные и апостериорные вероятности?
10. Каково применение и значение формулы Байеса?
11. Какие испытания являются повторными независимыми? Приведите пример. Какая формула используется для вычисления вероятности того, что в n испытаниях событие A появится ровно m раз при малом числе испытаний?
12. Какая формула используется для вычисления вероятности того, что в n испытаниях событие A появится ровно m раз при большом числе испытаний и вероятности p , отличной от 0 и 1?
13. Какая формула используется для вычисления вероятности того, что в n испытаниях событие A появится ровно m раз при большом числе испытаний и малой вероятности p ?
14. Какая формула используется для вычисления вероятности того, что в n испытаниях событие A появится от a до b раз при большом числе испытаний и вероятности p , отличной от 0 и 1?
15. Как Вы понимаете, что такое дискретная случайная величина? Приведите пример.

16. Какими свойствами обладает функция распределения дискретной случайной величины?
17. Какими способами можно задать дискретную случайную величину?
18. Назовите основные числовые характеристики дискретной случайной величины, способы их вычисления и свойства.
19. Что такое производящая функция неотрицательной целочисленной дискретной случайной величины? Как она связана с рядом распределения? Чему равна производящая функция суммы независимых случайных величин? Выведите производящую функцию извещенного вам дискретного распределения и найдите с ее помощью математическое ожидание и дисперсию случайной величины.
20. Как Вы понимаете, что такое непрерывная случайная величина? Приведите пример.
21. Какими свойствами обладает функция распределения непрерывной случайной величины?
22. Какими способами можно задать непрерывную случайную величину?
23. Какими свойствами обладает функция плотности вероятностей непрерывной случайной величины? Что она показывает?
24. Назовите основные числовые характеристики непрерывной случайной величины, способы их вычисления и свойства.
25. Что такое производящая/характеристическая функция случайной величины и как она связана с моментами случайной величины. Выведите производящую/характеристическую функцию и моменты для известного вам закона распределения случайной величины.
26. Почему нормальный закон распределения вынесен в отдельную тему теории вероятностей? К какому типу случайных величин он относится?
27. Как называется функция плотности вероятностей нормального закона распределения и какими свойствами обладает?
28. Что такое функция Лапласа, для чего она используется и какими свойствами обладает? Какова функция распределения нормально распределенной случайной величины?
29. Дайте определение стандартного нормального закона распределения. Назовите его свойства.
30. Каково влияние на график функции плотности вероятностей значений математического ожидания и дисперсии нормально распределенной случайной величины?
31. Назовите свойства случайной величины, имеющей нормальный закон распределения. Сформулируйте правило трёх сигм.
32. Что представляют собой случайные величины, распределенные в соответствии с законом распределения Пирсона? законом распределения Стьюдента? законом распределения Фишера-Снедекора?
33. Что такое закон больших чисел в широком смысле и в узком смысле?
34. Что позволяет оценить лемма Маркова и неравенство Чебышева?
35. Сформулируйте теорему Чебышева и условия её применения.
36. Сформулируйте теорему Бернулли и условия её применения.
37. Сформулируйте теорему Пуассона и условия её применения..

38. Что устанавливает центральная предельная теорема? Сформулируйте теорему Ляпунова.
39. Дайте определение многомерной случайной величины. Какими способами можно задать закон ее распределения?
40. Назовите основные числовые характеристики многомерной случайной величины, способы их вычисления и свойства.
41. Как Вы понимаете, что такое условное распределение? Приведите пример.
42. Какая связь между коррелированностью/некоррелированностью случайных величин и их зависимостью/независимостью?

10.2 Примеры заданий промежуточной/итоговой аттестации

Возможные темы задач аудиторной контрольной работы №1 (на случайные события):

- Алгебра случайных событий, использование диаграмм Эйлера-Венна
- Непосредственное вычисление вероятностей событий с помощью классического определения вероятности (особенно - с применением формул комбинаторики).
- Геометрическая вероятность.
- Теоремы сложения и умножения вероятностей.
- Формула полной вероятности; формула Байеса.
- Формула Бернулли.
- Теорема Пуассона, локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа.

Примеры задач:

1. Есть 13 карточек, на трех из которых написана буква А, на трех – буква Б, на трех – Р и на четырех – Н. Выбирают наугад и выкладывают в ряд одну за одной 7 карточек. Найти вероятности следующих событий:

- а) $A = \{\text{получится слово БАРАБАН}\};$
- б) $B = \{\text{в получивш. слово вошли ровно одна буква А и две буквы Р}\};$
- в) $C = \{\text{слово заканчивается буквами РРР или начинается буквами ББ}\}.$

2. В риэлтерской фирме имеется на продажу 100 однокомнатных квартир. Из них имеют телефон 40 квартир, центральное отопление – 80 квартир, балкон – 70 квартир. Квартир с телефоном и центральным отоплением имеется 30, с телефоном и балконом – 25, с балконом и центральным отоплением – 60. Квартир, имеющих и телефон, и центральное отопление, и балкон – 20. Указать число квартир, не имеющих ни телефона, ни центрального отопления, ни балкона.

3. Урна содержит черные, белые, синие и красные шары в соотношении 2:4:1:3. Из урны, содержащей 20 шаров, наудачу и последовательно извлекают по одному шару до появления черного шара. Найти вероятность, что придется для этого произвести ровно 3 извлечения, если выборка производится:

- а) без возвращения
- б) с возвращением.



4. В круг радиуса 1 с центром в начале координат наудачу бросается точка $(x; y)$. Найдите вероятность того, что ордината точки положительна и меньше ее абсциссы.
5. В сумке находится 6 новых и 4 игранных теннисных мячей. Из нее наугад вынимается три мяча, которыми играют. После этого мячи возвращаются в сумку. Найти вероятность того, что наугад извлеченные во второй раз из сумки 2 мяча будут игранными.
6. В круг радиуса R наудачу бросается точка. Какова вероятность, что взятая точка окажется:
- от центра круга на расстоянии, большем, чем $R/2$?
 - внутри вписанного в окружность квадрата?
7. Из колоды в 36 карт случайным образом извлечено 4 карты. Найти вероятность того, что среди них окажется 3 карты черной масти (\spadesuit, \clubsuit) и 2 карты с рисунком (валет, дама, король или туз).
8. На основе многолетних наблюдений установлено, что тест с первого раза успешно выполняют примерно 60 из 100 студентов некоторого вуза. Найти вероятности того, что из 250 наудачу выбранных студентов этого вуза:
- количество студентов, успешно прошедших тестирование, отклонится от наиболее вероятного числа таких студентов по абсолютной величине более чем на 10 чел.;
 - число студентов, которые не смогли выполнить тест, окажется больше 110?
9. Что вероятнее, выиграть у равносильного противника не менее 3 партий из 4 или не менее 70 партий из 100? С какой вероятностью будет выиграна ровно половина партий из 100?

Возможные темы задач аудиторной контрольной работы №2
(на случайные величины):

- Ряд распределения (функция вероятностей) и функция распределения дискретной случайной величины, расчет, графическое представление и свойства. Математическое ожидание, дисперсия, стандартное отклонение дискретной случайной величины и их свойства. Начальные и центральные моменты (до 4-го порядка), медиана, мода.
- Функция плотности вероятностей и функция распределения непрерывной случайной величины, их свойства и графическое представление. Переход от одной формы представления случайной величины к другой. Математическое ожидание, дисперсия, стандартное отклонение непрерывной случайной величины и их свойства. Начальные и центральные моменты (до 4-го порядка), медиана, мода, квантили.
- Расчет вероятностей попадания в интервалы для любых типов случайных величин.
- Расчет основных законов распределения дискретных и непрерывных случайных величин.
- Нормальный закон распределения и все основные формулы расчета функций, характеристик и вероятностей нормальной случайной величины.
- Практическое применение закона больших чисел и основных предельных теорем.

Примеры задач:

1. Имеется колода из 52 карт (по 13 карт каждой масти, с джок по тузы). Из неё случайным образом извлекают 2 карты. Составить закон распределения числа дам среди извлеченных карт, если выборка производится:

- а) без возвращения.
- б) с возвращением.

Построить ряды и функции распределения (аналитически и графически) случайных величин, назвать законы распределения, найти их числовые характеристики - математическое ожидание, моду и коэффициент асимметрии.

в) составить производящие или характеристические функции случайных величин и найти с их помощью математические ожидания и дисперсии.

2. В коробке лежат 8 красных и 2 синих карандашей. Случайным образом карандаши извлекают. Найти среднее значение и дисперсию случайной величины:

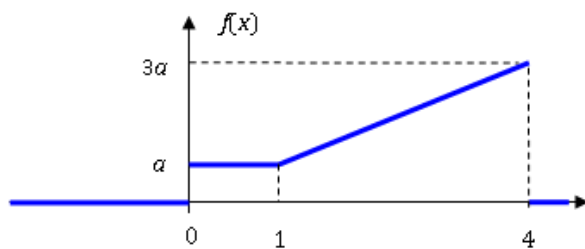
а) X - числа синих карандашей среди 3 извлеченных без возвращения обратно в коробку;

б) Y - числа синих карандашей среди 3 извлеченных с возвращением каждого извлеченного карандаша обратно в коробку и их перемешивания перед следующим случайным извлечением;

в) Z – числа извлеченных красных карандашей до появления первого синего с возвращением каждого извлеченного карандаша обратно в коробку и их перемешивания перед следующим случайным извлечением.

г) K – числа извлеченных красных карандашей до появления третьего по счету синего с возвращением каждого извлеченного карандаша обратно в коробку и их перемешивания перед следующим случайным извлечением.

3. Случайная величина X имеет непрерывный закон распределения. Ее функция плотности вероятности имеет вид, изображенный на рисунке:



Требуется найти:

- а) значение параметра a ;
- б) аналитическое выражение функции плотности вероятности;
- в) интегральную функцию распределения $F(x)$, построить график;
- г) математическое ожидание, моду и медиану;
- д) квантиль уровня 0,2; верхний квартиль;
- е) вероятность того, что случ. величина X попадет в интервалы $(0;1)$, $(-1;4)$, $(1,5; 2,5)$.



4. Вычислить моменты (начальные и центральные) до четвертого порядка включительно, коэффициенты асимметрии и эксцесса для случайной величины X – числа появлений герба при трех подбрасываниях монеты.

5. Растение некоторого сорта с вероятностью 0,9 дает нормальные всходы, если вес семени лежит в границах от 44 г. до 48 г., семя также прорастает, если его вес ниже или выше нормы, с вероятностями 0,4 и 0,3 соответственно. Какова вероятность того, что случайно отобранное семя взойдет, если вес семян подчиняется нормальному закону распределения с дисперсией 36 г. и известно, что вес 97,725 % семян не превышает 57 г.

6. Участник соревнований должен 8 раз выстрелить по мишени и вытащить 1 карту из колоды без картинок (содержащей только 20 карт номиналом 6, 7, 8, 9 и 10). Вероятность попадания участника по мишени равна 0,75. Если сумма числа попаданий X и номинала извлеченной карты Y превосходит 16, то участник проходит во второй тур, если эта сумма лежит в пределах от 12 до 16, то ему устраивается дополнительное испытание. Оценить с помощью неравенств закона больших чисел вероятности обоих событий.

7. Вероятность того, что на предприятии отрасли была проведена налоговая проверка, равна 0,1. Оценить наименьшее количество предприятий, которое следует отобрать, чтобы доля непроверенных предприятий отличалась от вероятности не более, чем на 0,03 (по абсолютной величине), с вероятностью, не меньшей 0,85.

ВАРИАНТЫ ЗАДАЧ ЭКЗАМЕНА по всему курсу

1. Из колоды 36 карт случайным образом одну за одной извлекают карты. Если рассмотреть 2 варианта - возвращения каждой извлеченной карты обратно в колоду и выбор без возвращения карт в колоду, какова вероятность, что среди них окажутся представители всех мастей, если извлекается: а) 4 карты; б) 5 карт.

2. Подбрасывают один раз 9 игральных костей (идеальных кубиков с 6 гранями, на которых написаны цифры от 1 до 6) и смотрят, какие выпали цифры. Найти вероятности следующих событий:

- а) $A = \{\text{ни на одной кости не выпадут цифры 1 и 3}\}$;
- б) $B = \{\text{на костях выпадут ровно три 6}\}$;
- в) $C = \{\text{цифры 2 и 5 выпадут по одному разу}\}$.

3. Электричка состоит из 12 вагонов. Каждый из 7 пассажиров наудачу выбирает любой вагон независимо от выбора остальных. Найти вероятности следующих событий:

- а) $A = \{\text{все пассажиры сели в первые три вагона}\}$;
- б) $B = \{\text{в первый и последний вагон сели по одному пассажиру}\}$;
- в) $C = \{\text{все пассажиры сели в разные вагоны}\}$.

4. Из множества шестизначных номеров (любая цифра от 0 до 9 может стоять на любом месте) выбран случайным образом один. Найти вероятности следующих событий:

- а) $A = \{\text{в номере не участвуют цифры 0 и 9}\}$;
- б) $B = \{\text{все цифры номера различны}\}$;
- в) $C = \{\text{цифры 2, 3 и 5 в номере встречаются по одному разу}\}$.

5. В круг вписан квадрат.

а) Какова вероятность того, что точка, брошенная наудачу внутрь круга, окажется и внутри квадрата?

б) Какова вероятность того, что из 10 точек, брошенных наудачу независимо одна от другой внутрь круга, четыре попадут в квадрат, три — в один сегмент и по одной — в оставшееся три сегмента?

в) какова вероятность, что из 150 точек, брошенных в круг, в квадрат попадут ровно 90? Более 100?

6. Есть три урны с шарами. В первой и второй урнах по 3 белых и 2 черных шара, в третьей урне - 5 белых и 1 черный шар. Наудачу выбирается урна, из неё трижды вынимается шар, который каждый раз возвращается обратно, и шары в урне перемешиваются. Найти вероятность того, что была выбрана третья урна, если ровно 2 раза из трех был вынут белый шар.

7. Из урны с разноцветными шарами, в которой находятся 1 красный, 2 зеленых, 3 синих и 3 желтых шара, случайным образом и без возвращения извлекают 3 шара. Изучить случайную величину X – количество желтых шаров среди извлеченных.

а) Найти закон распределения X , построить полигон и функцию распределения (аналитически и графически) случайной величины;

б) найти числовые характеристики - математическое ожидание, моду, медиану и коэффициент эксцесса;

в) составить производящую функцию случайной величины и найти с её помощью математическое ожидание и дисперсию.

8. Имеется колода 36 карт (по 9 карт каждой масти, с шестерок по тузы). Из неё случайным образом извлекают 2 карты. Составить закон распределения карт пиковой масти среди извлеченных карт, если выборка производится:

а) без возвращения.

б) с возвращением.

Построить полигоны и функции распределения (аналитически и графически) случайных величин, найти их числовые характеристики - математическое ожидание, моду и коэффициент асимметрии.

в) составить производящие функции случайных величин и найти с их помощью математические ожидания и дисперсии.



9. На конвейер в пропорции 3:2 поступают детали с двух производственных линий. 5% деталей первой линии бракуются. Брак второй линии составляет в среднем 10%.

а) Случайная величина X - количество бракованных деталей среди 3 наудачу взятых с конвейера.

б) Случайная величина Y - число проверенных деталей до появления первой бракованной.

Какие законы распределения имеют случайные величины X и Y ? Построить функции распределения (аналитически и графически) случайных величин, найти их числовые характеристики - математическое ожидание, моду и дисперсию с помощью производящей или характеристической функции.

10. Химическая реакция с вероятностью 0,97 приводит к положительным результатам, если она проводится при температуре от 42°C до 46°C . Если температура опускается ниже или поднимается выше указанных границ, то положительные результаты реакции достигаются с вероятностями 0,2 и 0,4 соответственно. Какова вероятность положительного результата реакции в случайно выбранном температурном режиме, если температура при ее проведении подчиняется нормальному закону распределения с дисперсией 25°C и известно, что в 99,865 % экспериментов она не превышает 60°C .

11. Какова вероятность, что при проведении 5 независимых испытаний значение случайной величины 3 раза попадет в интервал $[-1;3]$, если X имеет следующий закон распределения:

а) равномерный на интервале $[-2;0]$;

б) нормальный с параметрами $\mu=2$; $\sigma=1$;

в) показательный с параметром $\lambda=0,3$.

г) логнормальный с параметрами $\mu=1,5$; $\sigma=1$.

12. Непрерывная случайная величина X может принимать ненулевые значения только на отрезке $[-1;1]$, причем интегральная функция распределения вероятностей имеет на этом отрезке вид $ax^2 + bx + c$. В точке $x = \sqrt{2} - 1$ - медиана случайной величины.

Требуется найти:

а) значения параметров a, b, c ;

б) аналитическое выражение интегральной функции распределения $F(x)$, построить график;

в) аналитическое выражение функции плотности вероятности, построить график;

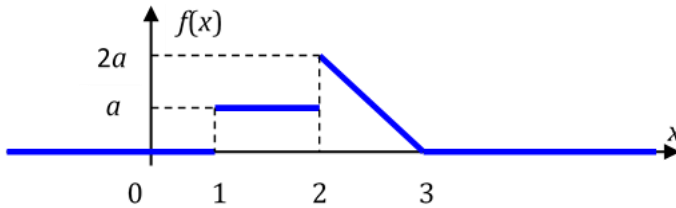
г) математическое ожидание, моду и начальный момент 2-го порядка;

д) медиану, квантиль уровня 0,3; верхний квартиль, дать их интерпретацию;

е) вероятность того, что случайная величина X попадет в интервалы $(-2;-1)$, $(-1;4)$, $(0;$

1).

13. Случайная величина X имеет непрерывный закон распределения. Ее функция плотности вероятности имеет вид, изображенный на рисунке:



Требуется найти:

- значение параметра a ; аналитическое выражение функции плотности вероятности;
- интегральную функцию распределения $F(x)$, построить график;
- математическое ожидание, моду и начальный момент 3-го порядка;
- медиану, квантиль уровня 0,8; нижний квартиль, дать их интерпретацию;
- вероятность того, что случайная величина X попадет в интервалы $(0;1)$, $(-1;4)$, $(1,5; 2,5)$.

14. Среднее время между двумя сбоями в работе оборудования равно 1000 часам и равно среднему квадратическому отклонению. Оценить с помощью закона больших чисел вероятность того, что время между двумя сбоями в работе оборудования:

- превысит 1200 часов;
- будет не более 1500 часов;
- отклонится от математического ожидания не более чем на 1100 часов.

Уточните вероятности при условии, что изучаемая случайная величина имеет показательный закон распределения.

15. Идеальный шестигранный кубик (грani с цифрами от 1 до 6) подбрасывается 1200 раз. Оценить с помощью закона больших чисел и сравнить с результатами, полученными по точным формулам, вероятности того, что:

- число выпадения «тройки» на верхней грани окажется более 210;
- число выпавших «троек» отклонится от среднего числа по абсолютной величине не более чем на 20.

16. Построить производящую/характеристическую/семиинвариантов функцию (любую на выбор) и найти с ее помощью математическое ожидание и дисперсию, если функция плотности вероятностей имеет вид: $f(x) = a \cdot e^{-\lambda|x|}$

17. Пусть X и Y — независимые случайные величины, X подчиняется закону распределения Пуассона с математическим ожиданием 1, Y подчиняется закону распределения Пуассона с дисперсией 1. Какому закону распределения подчиняется их сумма - случайная величина $Z = X + Y$? Докажите с помощью производящих или характеристических функций. Найдите вероятность попадания Z в интервал $(-2; 2,1)$ $(-2 < Z < 2,1)$.



Теоретические вопросы к ЭКЗАМЕНУ по курсу «Теория вероятностей»

1. Случайные события. Основные понятия. Классификация событий. Диаграммы Эйлера-Венна.
2. Операции над случайными событиями и их свойства. Геометрическая интерпретация действий над случайными событиями с помощью диаграмм Эйлера-Венна.
3. Вероятность случайного события. Различные определения вероятности. Классическое определение и область его применимости.
4. Вероятность случайного события. Различные определения вероятности. Статистическое определение и область его применимости.
5. Вероятность случайного события. Различные определения вероятности. Геометрическое определение и область его применимости.
6. Комбинаторика. Основные понятия. Правила умножения и сложения комбинаторики.
7. Основные понятия комбинаторики. Размещения. Перестановки. Их сходства и отличия. Выбор с возвращением и без возвращения.
8. Основные понятия комбинаторики. Размещения. Сочетания. Их сходства и отличия. Выбор с возвращением и без возвращения.
9. Основные понятия комбинаторики. Сочетания. Их использование в теории вероятностей. Правило Паскаля и другие соотношения. Выбор с возвращением и без возвращения.
10. Аксиоматика Колмогорова. Аксиоматическое определение вероятности. Алгебра событий. Поле вероятностей, σ -алгебра событий.
11. Теоремы сложения вероятностей для несовместных случайных событий (для двух случайных событий с доказательством).
12. Теоремы сложения вероятностей для двух, трех и n совместных случайных событий (для двух случайных событий с доказательством).
13. Зависимость случайных событий. Условная вероятность. Теоремы умножения вероятностей.
14. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли (с выводом). Частная и общая теорема о повторении опытов в случае двух исходов испытания.
15. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли. Частная и общая теорема о повторении опытов в случае числа исходов испытания, большего двух.
16. Повторные независимые испытания. Теорема Пуассона. Условия применения. Приближение формулы Бернулли при большом числе испытаний к формуле Пуассона (вывод).
17. Повторные независимые испытания. Приближение биномиального распределения при большом числе испытаний к нормальному. Локальная теорема Муавра-Лапласа. Условия применения.
18. Повторные независимые испытания. Приближение биномиального распределения при большом числе испытаний к нормальному. Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Условия применения. Связь с ЦПТ.
19. Формула полной вероятности. Формула Байеса (вывод). Область применения и научное значение. Априорные и апостериорные вероятности.
20. Случайные величины. Виды случайных величин. Их сходства и отличия.

21. Дискретная случайная величина. Математическое ожидание и дисперсия. Основные законы распределения дискретных случайных величин (перечислить).
22. Функция распределения случайной величины и её свойства. Сходства и отличия функций распределений дискретных и непрерывных случайных величин.
23. Непрерывная случайная величина. Теорема о вероятности отдельно взятого значения. Математическое ожидание и дисперсия. Основные законы распределения непрерывных случайных величин (перечислить).
24. Непрерывная случайная величина. Функция плотности вероятности и её свойства.
25. Математическое ожидание случайной величины. Его свойства. Отличия для независимых и зависимых случайных величин в расчете математического ожидания их произведения.
26. Понятие о центрированной и стандартной (нормированной) случайной величине. Их связь с исходной величиной, Изменение формы и положения на координатной плоскости полигона или кривой плотности вероятности при стандартизации (нормировании).
27. Дисперсия случайной величины. Её свойства. Отличия для независимых и зависимых случайных величин в расчете дисперсии их суммы. Среднее квадратическое отклонение.
28. Начальные и центральные моменты k -го порядка случайной величины. Наиболее применимые характеристики. Связь между ними.
29. Коэффициенты асимметрии и эксцесса случайной величины. Мода и виды распределений, связанные с ней (привести примеры известных распределений).
30. Медиана. Квантили и квартили случайной величины. Их значение и интерпретация. Неоднозначность определения у дискретных случайных величин.
31. Биномиальное распределение случайной величины. Его характеристики (вывести математическое ожидание и дисперсию). Сходства и отличия с отрицательным биномиальным законом.
32. Геометрическое распределение случайной величины. Его характеристики (вывести математическое ожидание и дисперсию). Сходства и отличия с отрицательным биномиальным законом.
33. Отрицательное биномиальное распределение. Сходства и отличия с биномиальным и геометрическим законами.
34. Пуассоновское распределение. Его характеристики (вывод математического ожидания и дисперсии). Область применения.
35. Поток случайных событий и его основные понятия. Пуассоновский поток и его связь с показательным распределением.
36. Гипергеометрическое распределение. Его характеристики. Отличия от других дискретных законов распределения.
37. Производящая функция неотрицательной целочисленной дискретной случайной величины. Определение, связь с рядом распределения. Производящая функция суммы независимых случайных величин.
38. Производящая функция неотрицательной целочисленной дискретной случайной величины как функция моментов. Вывод математического ожидания и дисперсии случайной величины.
39. Нормальный закон распределения. Функция плотности вероятности и её свойства. Характеристики формы кривой.

40. Нормальный закон распределения. Функция распределения, её вывод через функцию плотности вероятности. Функция Лапласа и её свойства.
41. Свойства случайной величины, распределённой по нормальному закону. Правило трёх сигм.
42. Стандартная нормально распределённая случайная величина. Её свойства.
43. Равномерный закон распределения. Его характеристики (вывод математического ожидания и дисперсии). Функция распределения, её вывод через функцию плотности вероятности.
44. Показательный (экспоненциальный) закон распределения. Основные характеристики (вывод математического ожидания и дисперсии). Функция распределения (без вывода).
45. Показательный (экспоненциальный) закон распределения. Основные характеристики (без вывода). Функция распределения, её вывод через функцию плотности вероятности. Связь с пуассоновским потоком. Области применения.
46. Логарифмически-нормальное (логнормальное) распределение. Функция плотности вероятности и её свойства. Функция распределения. Его характеристики. Области применения. Характеристики формы кривой.
47. Гамма-распределение. Функция плотности вероятности. Его математическое ожидание и дисперсия. Характеристики формы кривой.
48. Распределение Пирсона (χ^2). Связь с другими распределениями. Функция плотности вероятности. Математическое ожидание и дисперсия.
49. Распределение Стюдента (t - распределение). Связь с другими распределениями. Функция плотности вероятности. Математическое ожидание и дисперсия.
50. Распределение Фишера-Снедекора (F-распределение). Связь с другими распределениями. Функция плотности вероятности. Математическое ожидание и дисперсия.
51. Лемма Маркова (с доказательством). Условия применимости. Закон больших чисел в форме теоремы Маркова.
52. Закон больших чисел. Неравенство и теорема Чебышева (с доказательством). Теорема Хинчина.
53. Закон больших чисел. Основные теоремы. Теорема Бернулли. Теорема Пуассона. Условия применимости.
54. Центральная предельная теорема и её значение. Теорема Ляпунова (частный случай) с доказательством. Следствия.
55. Характеристическая функция случайной величины и ее основные свойства. Вывод характеристической функции для ... закона.
56. Характеристическая функция случайной величины и ее связь с моментами случайной величины. Вывод характеристической функции и моментов для ... закона.
57. Семиинварианты (полуинварианты) случайной величины и их свойства, использование для нахождения моментов случайной величины. Вывод моментов с помощью семиинвариантов для ... закона.
58. Многомерная случайная величина. Основные понятия. Двумерные дискретные случайные величины.
59. Многомерная случайная величина. Основные понятия. Двумерные непрерывные случайные величины. Функция плотности вероятности двумерной непрерывной случайной величины и её свойства.
60. Функция распределения двумерной случайной величины и её свойства.

61. Плотности распределения отдельных величин, образующих двумерную непрерывную случайную величину (маргинальные распределения). Условный закон распределения одной из одномерных составляющих двумерной случайной величины. Выражение условных плотностей распределения через безусловные.

62. Дискретные двумерные случайные величины. Одномерные (маргинальные) распределения. Условный закон распределения одной из одномерных составляющих двумерной дискретной случайной величины.

63. Теорема умножения вероятностей/плотностей распределения для дискретных/непрерывных случайных величин. Независимость случайных величин. Связь между коррелированностью/некоррелированностью случайных величин и их зависимостью/независимостью.

64. Начальные и центральные моменты порядка $k+s$ двумерной случайной величины. Расчет для дискретных и непрерывных случайных величин. Наиболее применимая характеристика.

65. Ковариация (корреляционный момент) двух случайных величин. Её свойства. Связь с математическим ожиданием произведения и дисперсией суммы случайных величин.

66. Коэффициент корреляции и его свойства. Понятие некоррелированных случайных величин. Связь между коррелированностью/некоррелированностью случайных величин и их зависимостью/независимостью.

67. Двумерный нормальный закон распределения. Его параметры. Функция плотности вероятности. Теорема о связи между некоррелированностью и независимостью двух нормально распределенных случайных величин.

11 Порядок формирования оценок по дисциплине

Преподаватель оценивает активность работы студентов на семинарских занятиях и их самостоятельной работы: активность студентов в решении задач у доски и на месте, правильность решения задач на семинаре, выборочная оценка подготовленности студентов к семинару - объем и правильность решенного домашнего задания и т.д. Оценки за работу на семинарских занятиях преподаватель выставляет в рабочую ведомость. Кроме того, оценивается активность студентов на лекциях, выполнение ими лекционных заданий, в виде дополнительных бонусных баллов. Оценка по 10-ти балльной шкале за работу на лекциях, семинарах и самостоятельно определяется перед итоговым контролем - $O_{актив.}$ и составляет 40% от накопленной оценки.

По курсу предусмотрено две аудиторных контрольных работы и две домашних индивидуальных работы по каждому из разделов курса (описание работ – в п. 6-7 настоящей Программы, примеры заданий – в п.10.2), оценки за которые также выставляются по 10-балльной шкале. Вес среднего арифметического домашних заданий в итоговой накопленной оценке составляет 20%, среднего арифметического промежуточных аудиторных контрольных работ – 40%.

Таким образом, **накопленная** оценка за курс формируется следующим образом:

$$O_{накопленная} = 0,4 \cdot O_{актив.} + 0,2 \cdot (O_{ДЗ1} + O_{ДЗ2})/2 + 0,4 \cdot (O_{КР1} + O_{КР2})/2$$



Итоговая оценка за курс выставляется после проведения экзамена и просмотра работ в конце второго / начале третьего модуля (в зависимости от даты проведения экзамена) и **равна:**

$$O_{\text{итог}} = 0,5 \cdot O_{\text{накол.}} + 0,5 \cdot O_{\text{ЭКЗ}}$$

Способ округления **накопленной** оценки текущего контроля, оценки итогового контроля в форме **экзамена** и **итоговой** оценки по курсу – арифметический, по правилам математики (рабочая ведомость преподавателя ведется в Excel и все оценки сохраняются и участвуют в формулах расчета итоговой оценки без промежуточных округлений, округляются только оценки, идущие в ведомость).

В диплом выставляется результирующая оценка по учебной дисциплине **Оитог**.

Оценки в ведомость – накопленная, экзаменационная и итоговая за курс выставляются после округлений по принятой в НИУ ВШЭ 10-ти балльной шкале:

Балл	Оценка знаний	Оценка в ведомость
10	блестяще	отлично
9	отлично	
8	почти отлично	
7	очень хорошо	хорошо
6	хорошо	
5	удовлетворительно	удовлетворительно
4	весьма удовлетворительно	
0-3	неудовлетворительно	неудовлетворительно

12 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

12.1 Базовый учебник

1. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие/ Мхитарян В.С., Трошин Л.И., Астафьева Е.В., Миронкина Ю.Н./ под ред. В.С. Мхитаряна. – М.: Синергия, 2013.

12.2 Основная литература

2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: «Академия», 2005.
3. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001.
4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей. – М.: Высшая школа, 2006.

12.3 Дополнительная литература

5. Айвазян С. А., Мхитарян В. С. Прикладная статистика. Основы эконометрики. – Т.1: Теория вероятностей и прикладная статистика М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001, 656 с.
6. Боровков А.А. *Теория вероятностей*. М., Наука, 1986; Либроком 2009. – 656 с.
7. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. - М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – 448 с. (и любые другие издания)

8. Гмурман В. Е. *Теория вероятностей и математическая статистика*. - М.: Высшее образование, 2009. - 480 с.
9. Колемаев В.А., Калинина В.Н. *Теория вероятностей и математическая статистика*. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2009. – 352 с.
10. Пугачев В.С. *Теория вероятностей и математическая статистика*. – М. Наука, 1979; Физматлит, 2002. – 496 с.
11. Колмогоров А. Н. *Основные понятия теории вероятностей*. - М.: Наука, 1974.
12. Колемаев В.А., Староверов О.В., Турундаевский В.Б. *Теория вероятностей и математическая статистика*. – М. Высшая школа, 1990.
13. Чистяков, В. П. *Курс теории вероятностей*, М., 1982.
14. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения (2 тома)*. М., Мир, 1964; Либроком, 2010 г. - Том 1, 2.
15. Ширяев, А. Н. *Вероятность*, Наука. М.: 1989; МЦНМО, 2007. – 968 с. (2 книги).
16. Виленкин Н. Я., Виленкин А. Н., Виленкин П. А.. *Комбинаторика*. – М.: Наука, 1969. – 368 с., МЦНМО, ФИМА, 2010. – 400 с.
17. Виленкин Н.Я. *Популярная комбинаторика* – М.: Наука, 1969. – 209 с.
18. Мостеллер Ф., Рурке Р., Томас Дж. *Вероятность. / Пер. с англ.* - М., Мир, 1969.- Главы 1-3.
19. Коршунов, Д. А., Фосс, С. Г. Сборник задач и упражнений по теории вероятностей, Новосибирск, 1997.
20. Колемаев В.А., Калинина В.Н., Соловьев В.И. и др. *Теория вероятностей в примерах и задачах*. ГУУ – М., 2001. – 87 с.
21. Гмурман В.Е. *Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике*. - М . Высшее Образование, 2009 -416 с.
22. Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. *Сборник задач по теории вероятностей*. – М.: Наука, 1989.
23. Мешалкин Л.Д. *Сборник задач по теории вероятностей*. М., изд-во МГУ, 1963.
24. Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. *Задачи по теории вероятностей*. М., Наука, 1986.
25. Лозинский С.Н., *Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике*. – М. Статистика, 1975.
26. Paul Newbold, William L. Carlson, Betty M. Thorne. *Statistics for Business and Economics*. – 8th ed. Pearson, 2013. – Chapter 3.
27. Sheldon Ross. *A First Course in Probability*. – 5th ed. - Prentice Hall, 1997. - 515 p.
28. David Stirzaker. *Elementary Probability*. – 2nd ed. Cambridge University Press, 2003. – 524 p.
29. Geoffrey R. Grimmett, David R. Stirzaker. *One Thousand Exercises in Probability* – Oxford University Press, 2001. – 438 p.
30. Чернова Н.И., НГУ. *Семестровый курс лекций по теории вероятностей для студентов экономического факультета* [<http://www.nsu.ru/mmftvims/chernova/tv/>].



12.4 Справочники, словари, энциклопедии

31. *Справочник по теории вероятностей и математической статистике* / под ред. В.С.Королюка. – Киев: Наукова Думка, 1978. – 582 с.
32. Вадзинский Р.Н. *Справочник по вероятностным распределениям.* – СПб.: Наука, 2001. – 295 с.
33. *Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия* /Под ред. Ю. В. Прохорова. - М.: Большая Рос. энциклопедия, 2003. - 912 с.

12.5 Программные средства

Для успешного освоения дисциплины, студент может использовать следующие программные средства:

- Microsoft Excel и его модуль «Встроенные функции» - «Математические» (напр. ЧИСЛКОМБ), «Статистические» (напр., НОРМ.РАСП)

12.6 Дистанционная поддержка дисциплины

Для обмена информацией с преподавателем студентами используется электронная почта.

13 Материально-техническое обеспечение дисциплины

Для проведения дисциплины в полном объеме необходим мультимедийный проектор для чтения лекций (с возможностью показа презентаций и видеоматериалов), для семинаров нужна аудитория с большой доской (для комфортного решения задач).