Алгебра. Второй курс. Семинар 2

Задача 1. Для каждого из перечисленных ниже полей опишите все вложения этого поля в поле комплексных чисел (т.е. выберете базис в поле, как в векторном пространстве над $\mathbb{Q}$, и опишите образы базисных векторов при каждом вложении)
(а) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
(б) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$
(в) Поле разложения многочлена $x^3 - 2$.
(г) Поле разложения многочлена $x^4 - 2$.

Задача 2. Опишите группы автоморфизмов полей, перечисленных в задаче 1.

Задача 3. Пусть $n_1, \cdots, n_m$ - попарно взаимно простые натуральные числа, никакое из которых не является полным квадратом. Докажите, что

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{n_1}, \cdots, \sqrt{n_m}) : \mathbb{Q}] = 2^m.$$

(Используйте индукцию по m. Пусть $K_i = \mathbb{Q}(\sqrt{n_1}, \cdots, \sqrt{n_i})$, $(i = 1, \cdots m)$. В предположении, что степень K_{m-1} над $\mathbb{Q}$ равна 2^{m-1}, опишите группу G автоморфизмов поля K_{m-1}. Если бы $\sqrt{n_m} \in K_{m-1}$, элемент $\sqrt{n_m}$ был бы собственным вектором для всех $g \in G$.)

Задача 4. Пусть $K \subset L$ - алгебраическое расширение (возможно, бесконечное). Докажите, что любой эндоморфизм поля L, тождественный на K, является автоморфизмом.

Задача 5. (а) Пусть $L \supset K$ - поле разложения многочлена $f(x) \in K[x]$. Докажите, что любой неприводимый над K многочлен, $g(x) \in K[x]$, который имеет в L хотя бы один корень, разлагается в $L[x]$ на линейные множители.
Алгебраические расширения с таким свойством называются нормальными.
(б) Докажите, что любое конечное нормальное расширение является полем разложения некоторого многочлена.