Алгебра. Второй курс. Семинар 3

Задача 1. Для конечного расширения $K \subset L$ обозначим через $\{L : K\}$ число вложений поля L в алгебраическое замыкание $\overline{K}$ поля K, тождественных на K. Докажите, что для башни расширений $F \subset K \subset L$ выполняется равенство

$$\{K : F\}\{L : K\} = \{L : F\}.$$

Задача 2. Пусть $F \subset K \subset L$ - алгебраические расширения.
(а) Предположим, что $F \subset K$ и $K \subset L$ - нормальные расширения. Правда ли, что $F \subset L$ - нормальное расширение?
(б) Предположим, что $F \subset K$ и $K \subset L$ - сепарабельные расширения. Правда ли, что $F \subset L$ - сепарабельное расширение?

Задача 3. Пусть $\alpha \in \overline{K}$ и $\beta \in \overline{K}$ - различные корни сепарабельного полинома[1] $f(x) \in K[x]$ степени $d > 1$. Докажите, что

$$[K(\alpha + \beta) : K] \leq \frac{d(d-1)}{2}.$$

Задача 4. Докажите, что любое алгебраическое расширение конечного поля является нормальным.

Задача 5. Пусть K и L - конечные поля. Докажите, что K можно вложить в L тогда и только тогда, когда $|L|$ - степень $|K|$.

Задача 6. (а) Докажите, что для любого $n > 0$ существует неприводимый многочлен $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ степени n.
(б) Сколько существует неприводимых многочленов $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ степени 5?

[1] Напомним, что полином $f(x) \in K[x]$ называется сепарабельным, если него нет кратных корней в алгебраическом замыкании $\overline{K}$ поля K.