Алгебра. Второй курс. Листок 2

Задачи из этого листка принимаются до 8 октября включительно.

Задача 1. Докажите, что любое алгебраическое расширение конечного поля нормально.
Задача 2. Докажите, что для любого простого числа p многочлен x^4+1
(а) имеет корень в $\mathbb{F}_{p^2}$
(б) приводим над $\mathbb{F}_p$.
Задача 3. Пусть $K \subset L$ - конечное сепарабельное расширение. Докажите, что существует лишь конечное число промежуточных подрасширений $K \subset F \subset L$.
Задача 4. Пусть $\mathbb{F}_p(x,y)$ - поле рациональных функций от двух переменных.
(а) Покажите, что расширение $\mathbb{F}_p(x,y) \subset \mathbb{F}_p(x^{\frac{1}{p}}, y^{\frac{1}{p}})$ не порождается одним элементом.
(б) Докажите, что существует бесконечно много промежуточных подрасширений $\mathbb{F}_p(x,y) \subset K \subset \mathbb{F}_p(x^{\frac{1}{p}}, y^{\frac{1}{p}})$.
Задача 5. Круговым многочленом $\Phi_n(x)$ называется многочлен, корни которого суть примитивные (комплексные) корни из единицы степени n. Покажите, что $\deg \Phi_n(x) = \phi(n)$, где ϕ — функция Эйлера, и что $\Phi_n(x)$ имеет целые коэффициенты.
Задача 6. Покажите, что круговой многочлен неприводим, следуя плану:
1. Предположим противное: $\Phi_n(x) = f(x)g(x)$, причем можно считать, что $f(x), g(x)$ имеют целые коэффициенты.
2. Тогда найдется η такое, что $f(\eta) = g(\eta^p) = 0$ для некоторого простого p не делящего n.
3. Значит, в остатках по модулю p многочлены $f(x)$ и $g(x^p) \equiv g(x)^p$ имеют общий корень.
4. Придите к противоречию.
Задача 7. Пусть $K \subset L$ - конечное расширение. Определим симметрическую билинейную форму ("форму следа") на K-векторном пространстве L:

$$L \times L \to K, \quad (a,b) \mapsto \mathrm{tr}_K(L_{ab}),$$

где $L_x : L \to L$ - оператор умножения на элемент $x \in L$. Докажите, что форма следа невырождена тогда и только тогда, когда расширение $K \subset L$ сепарабельно.
Задача 8. Докажите, что для любого простого p и $0 \neq a \in \mathbb{F}_p$, многочлен $x^p - x - a$ неприводим $\mathbb{F}_p[x]$.