Олимпиада НИУ ВШЭ для студентов и выпускников — 2017 г.
по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
Профиль 020 «Прикладная математика и информатика»

Время выполнения задания — 240 мин.
Решения олимпиадных заданий должны быть записаны по-русски или по-английски. Каждая задача оценивается из 10 баллов, максимальная сумма — 100 баллов.

Time to complete the task is 240 min.
Solutions should be written in English or Russian language. Each problem costs 10 points, maximal sum is equal to 100 points.

ОБЩАЯ ЧАСТЬ / GENERAL SECTION

1. Определите значения параметров a и b, для которых следующий интеграл существует в смысле главного значения и равен нулю:

1. Determine values of real parameters a and b for which the following integral has the Cauchy principal value zero:

$$V.p. \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \frac{dx}{a \cdot \cos x + b \cdot \sin x} = 0.$$

2. Решите матричное рекуррентное отношение

2. Solve the matrix recurrent relation

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A_{n-1},\ A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выпишите точные формулы для коэффициентов A_n.

Provide explicit formulae for coefficients of A_n.

3. Каждый житель страны Оз имеет одну из трех профессий: A, B, C. Дети отцов, имеющих профессии A, B, C, сохраняют профессии отцов с вероятностями 1/5, 2/5, 3/5 соответственно, а если не сохраняют, то с равными вероятностями выбирают любую из двух других профессий. Текущее поколение имеет следующее распределение профессий:
профессию A имело 20% жителей, B — 30%, C — 50%.
Найдите предельное распределение по профессиям, не меняющееся при смене поколений.

3. Every citizen in the land of Oz has one of three professions: A, B, C. Children of fathers who have a profession A, B, C, keep the profession of their fathers with the probabilities of 1/5, 2/5, 3/5, respectively, and if they choose not to have the same profession, then with equal probabilities they select any of the other two professions. The current generation has the following professions distribution:
A — 20 % , B — 30 %, C — 50 %.
Find the limit distribution of professions that will no longer changing over generations.

4. На n табличках, выложенных по кругу, записаны числа, каждое из которых равно 1 или –1. За какое наименьшее число вопросов можно наверняка определить произведение всех n чисел ($n \in \mathrm{N}, n > 3$), если за один вопрос разрешено узнать произведение чисел на

(1) любых трех табличках?
(2) любых трех табличках, лежащих подряд?

4. Each of n tablets lined on a circle is marked by a number 1 or -1. What is the minimum number of questions you should ask to determine the product of all n numbers ($n \in \mathrm{N}, n > 3$), if one question is allowed to know the product numbers of

(1) any three tablets?
(2) any three tablets placed in a row?

5. Пусть $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ — независимая выборка из нормального распределения с неизвестными средним и дисперсией. Найдите оценку параметров распределения методом максимального правдоподобия. Модифицируйте точечную оценку, чтобы она стала несмещенной и состоятельной.

5. Let $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ be independent sample from a normal distribution with unknown mean and variance. Find the parameters of this distribution using the maximum likelihood estimation method. Modify the resulting point estimation to make it unbiased and consistent.

6. Решите дифференциальное уравнение для $x > 0$

6. Solve the differential equation for $x > 0$

$$xy' = 2y + x^3 \ln x,\ y(1) = 0.$$

Олимпиада НИУ ВШЭ для студентов и выпускников — 2017 г.
по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
Профиль 020 «Прикладная математика и информатика»

СПЕЦИАЛЬНАЯ ЧАСТЬ / SPECIAL SECTION

Среди следующих задач решите не менее четырех. В зачет пойдут четыре лучших решения.

Solve at least four of the following problems. Up to four best solutions will be graded.

7. Вычислите $\int\limits_0^2 g(t)\mathrm{d}t$, где $g(t)$ — функция обратная к $f(x) = x^3 + x$.

7. Compute $\int\limits_0^2 g(t)\mathrm{d}t$, where $g(t)$ is the inverse function for $f(x) = x^3 + x$.

8. Пусть $x = x(t)$ — наименьший из положительных корней уравнения $\cos(tx) = \frac{1}{2} + x^2$.
Вычислите предел $\lim\limits_{t\to+\infty} tx(t)$.

8. Let $x = x(t)$ be the least positive root of the equation $\cos(tx) = \frac{1}{2} + x^2$.
Find the limit $\lim\limits_{t\to+\infty} tx(t)$.

9. Докажите неравенство

9. Prove the inequality

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} < 1,$$

при $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

if $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

10. Пусть n — нечётное простое число. Найдите асимптотику числа решений уравнения

10. Let n be an odd prime. Find the the asymptotic behavior of the number of solutions for the equation

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n}) \cdot (x_{2n+1} + x_{2n+2} + \cdots + x_{4n}) = n^2$$

в которых значение каждой переменной принадлежит множеству $\{0, 1\}$. Используйте формулу Стирлинга без доказательства: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

where each variable takes value from the set $\{0, 1\}$. Use Stirling's formula without proof: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

11. Планарный граф — это граф, который можно изобразить на плоскости, так, чтобы линии, изображающие рёбра, не пересекались. Полный граф — это граф, в котором любые две вершины соединены ребром. Известно, что в любом планарном графе число рёбер не превосходит $(3n-6)$, если $n \geqslant 3$ — число вершин. Найдите минимальное количество скрещиваний рёбер, которое можно достичь в изображении на плоскости полного графа на шести вершинах.

11. Planar graph is a graph that can be drawn on a plane without edge intersection. Complete graph is a graph in which any two vertices are adjacent. It is known that any planar graph with $n \geq 3$ vertices has not more than $(3n - 6)$ edges. Determine the minimal number of edge intersections that can emerge when drawing complete graph on six vertices.

12. Имеется три группы студентов: изучающие испанский, французский и китайский язык. В первых двух группах по пять студентов, в третьей — 205 студентов. Известно, что каждый из изучающих испанский знаком с каждым из изучающих французский, и что каждый из изучающих китайский, знаком по меньшей мере с тремя студентами в каждой из других групп. Докажите, что можно выбрать по три студента из каждой группы, так, чтобы среди выбранных девяти студентов любые два разноязычных студента были знакомы.

12. There are three groups of students, studying Spanish, French and Chinese languages respectively, five students in each of the first two groups, and 205 students in the third group. Each student in Spanish group knows each student in the French group. Each student in the Chinese group knows at least three students in each of the other two groups. Prove that one can choose three students from each of the groups in a way that among these nine students any pair of students that study different languages are acquainted.

13. В центре прямоугольного биллиардного стола длиной 360 × 120 см расположен биллиардный шар. По нему ударяют кием в случайном направлении. После удара шар останавливается, пройдя ровно 2.4 м. Найдите ожидаемое число отражений от бортов.

13. A ball is located in the center of a rectangular billiard table with dimensions 360 by 120 cm. The ball is hit in a random direction. After running the total distance of 2.4 m the ball stops. Find the expected number of reflections from the sides of the table.

14. Предложите эффективный алгоритм определения того, что данное натуральное число n — простое.

14. Propose a fast algorithm that answers the question if a given natural number n is prime.