Олимпиада НИУ ВШЭ для студентов и выпускников — 2018 г.
Направление: «Прикладная математика и информатика»

Профиль: «Прикладная математика и информатика»

КОД - 020

Время выполнения задания — 240 мин.
Решения олимпиадных заданий должны быть записаны по-русски или по-английски. Каждая задача оценивается из 10 баллов, максимальная сумма — 100 баллов.

Time to complete the task is 240 min.
Solutions should be written in English or Russian language. Each problem costs 10 points, maximal sum is equal to 100 points.

Блок № I. / Unit No. I

1. Найти предел последовательности:

1. Find the limit:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n(x)\,dx$$

2. Нормальным магическим квадратом порядка n называется такая квадратная матрица размера n на n, составленная из всех различных натуральных чисел от 1 до n^2, в которой суммы по каждому столбцу, каждой строке и двум главным диагоналям равны одному и тому же числу, называемому "магической константой". Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ –собственные числа матрицы M_n–нормального магического квадрата порядка n. Докажите, что для любого натурального $n \geq 3$ у любого магического квадрата порядка n есть собственное число λ_i такое, что выполняется $\sum\limits_{k\neq i}\lambda_k = 0$, и определите чему равно это число (для фиксированного n)?

2. A normal magic square of the order n is an n by n, matrix of distinct integers from 1 до n^2, such that the sum of each row, column and two main diagonals is the same number often referred to as "magic constant".Let $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – be the eigenvalues of the M_n–a normal magic square of the order n. Prove the for any natural number натурального $n \geq 3$ for any normal magic square of the order n there exist an eigenvalue λ_i such that the following holds $\sum\limits_{k\neq i}\lambda_k = 0$ and find the value of the eigenvalue λ_i (for the fixed n)?

3. "Задача о встрече". 3 человека договорились о встрече с 12 до 13 часов. Каждый приходит из них приходит в случайный момент времени и ждет тех кто еще не пришел не более 30 минут. Какова вероятность, что все трое встретятся?

3. "Meeting Problem". 3 persons decided to meet each other within a time interval between 12.00 and 13.00. Each of them arrives at a random time (within the agreed interval) and waits for those who have not arrived yet, no longer than 30 minutes. What is the probability of the fact that all three participants will meet together?

4. Матрицей перестановки порядка n называется такая матрица размера n на n, составленная из 0 и 1, что сумма (в поле действительных чисел) элементов по каждому ее столбцу и каждой строке равна 1. Найдите вероятность того, что для выбранной наугад (т.е. случайно и равновероятно из всего множества матриц перестановки такого порядка) матрицы перестановки порядка 4 $P_i^{\{4\}}$ выполняется

4. A permutation matrix of the order n is an n by n matrix of 0 and 1 such that the sum of each row and each column (in the field of real numbers) is equal to 1. Find the probability of the fact that for a random permutation matrix of the order 4 (i.e. for a matrix that has been chosen at random from the set of all possible permutation matrices of respective order, the probabilities of each matrix choice being the same) $P_i^{\{4\}}$ the following holds:

$$\mathrm{Tr}(P_i^{\{4\}}) \geq |\det(P_i^{\{4\}})|$$

5. Сколько существует попарно неизоморфных непланарных графов с 11 ребрами и 6 вершинами?

5. Find the number of pairwise nonisomorphic nonplanar graphs with 11 edges and 6 vertices

6. Найдите $f^{(2018)}(0)$ (производную от f 2018-ого порядка в точке $x = 0$), где

6. Calculate $f^{(2018)}(0)$ (the 2018-th derivative at the point $x = 0$), where

$$f(x) = \frac{1}{1 + x + x^2 + x^3}.$$

Блок № II / Unit No. II

Среди следующих задач решите не менее четырех. В зачет пойдут четыре лучших решения.

Solve at least four of the following problems. Four best solutions will be graded.

7. Сравните два числа:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{36}},$$

7. Compare the two numbers given by the following sums

$$1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{27}}.$$

8. $Y=[y_1,y_2,\ldots,y_n]$ - вектор состоящий из n ($n\in\mathbb{N}$) независимых случайных величин, каждая из которых распределена равномерно на интервале $[0,A]$ ($A>0$). $Y_{max}^{\{n\}}=\max\limits_k y_k$ -случайная величина, равная наибольшему из n элементов такого вектора. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y_{max}^{\{n\}}$

8. Let $Y=[y_1,y_2,\ldots,y_n]$ be the vector of independent random values uniformly distributed on $[0,A]$ ($A>0$).Let $Y_{max}^{\{n\}}=\max\limits_k y_k$ –be the random value, corresponding to the maximum element of the vector Y. Find the expectation and the variance of the random value $Y_{max}^{\{n\}}$

9. Граф G задан своей матрицей смежности

9. Consider the graph G with the following adjacency matrix

$$\begin{pmatrix} 0&0&1&1&1&1&1&1&0\\ 0&0&0&1&1&1&0&1&1\\ 1&0&0&0&1&1&1&1&1\\ 1&1&0&0&0&1&1&1&1\\ 1&1&1&0&0&0&0&1&1\\ 1&1&1&1&0&0&0&1&1\\ 1&0&1&1&0&0&0&0&1\\ 1&1&1&1&1&1&0&0&0\\ 0&1&1&1&1&1&1&0&0 \end{pmatrix}$$

(a) Является ли граф G гамильтоновым ?
(b) Является ли дополнение графа G эйлеровым графом ?

Find out whether
(a) The graph G is a Hamiltonian graph ?
(b) The complement of the graph G is an Eulerian graph ?

10. "Игра в лотерею". Производится игра в лотерею, в которой единственный игрок каждый день может выиграть один из трех призов. Вероятность выигрыша каждого из призов (в день) – p ($3p<1$), она не меняется от начала игры до выигрыша соответствующего приза. Если игрок выиграл какой-либо из трех призов, он не может выиграть его вновь. Игра происходит до тех пор, пока не будут выиграны все призы. Найти математическое ожидание и дисперсию времени игры

10. "A lottery game". A lottery game in which the only player can win one of the three prizes every day is carried out. The probability of winning each of the prizes (per day) is p ($3p<1$), it does not change from the beginning of the game until the corresponding prize is won. If a player wins any of the three prizes, he cannot win it again. The game takes place until all the prizes are won. Find the mathematical expectation and the variance of the game duration.

11. Сколько существует попарно неизоморфных графов с 8 вершинами и 25 ребрами?

11. Find the number of pairwise nonisomorphic graphs with 8 vertices and 25 edges

12. a) Распределение признака X в генеральной совокупности объёма N задано как:

a_1	a_2	$\dots$	a_k
$\frac{N_1}{N}$	$\frac{N_2}{N}$	$\dots$	$\frac{N_k}{N}$

$\sum_{i=1}^{k} N_i = N$. Обозначим $\overline{A}$ и $D(A)$ - генеральные среднее и дисперсию признака X:

$$\overline{A} = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i a_i}{N}, D(A) = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i \left(a_i - \overline{A}\right)^2}{N}.$$

Из генеральной совокупности производится случайный бесповторный выбор n элементов: $X_1, X_2, \dots X_n$. Бесповторный выбор означает, что отобранные элементы в генеральную совокупность не возвращаются. Обозначим среднее арифметическое $\overline{X}$ признака X в случайной бесповторной выборке как:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}.$$

Найдите математическое ожидание $E\left(\overline{X}\right)$ и дисперсию $D\left(\overline{X}\right)$ среднего арифметического $\overline{X}$ признака X в случайной бесповторной выборке объема n из первоначальной генеральной совокупности объема N.

b.) Пусть распределение признака X в генеральной совокупности объёма N задано как распределение Бернулли, $0 < N_1 < N$, p - генеральная доля значения a_1:

$a_1 = 1$	$a_2 = 0$
$p = \frac{N_1}{N}$	$q = 1 - p = \frac{N - N_1}{N}$

Аналогично пункту a) из генеральной совокупности производится случайный бесповторный выбор n элементов: $X_1, X_2, \dots X_n$. Обозначим среднее арифметическое $\bar{X} = \hat{p}_n$ (выборочную долю значения a_1) признака X в случайной бесповторной выборке как:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \hat{p}_n.$$

Найдите математическое ожидание $E(\hat{p}_n)$ и дисперсию $D(\hat{p}_n)$ выборочной доли $\hat{p}_n$ значения a_1 признака X в случайной бесповторной выборке объема n из первоначальной генеральной совокупности объема N.

c.) Пусть распределение двумерного признака (X, Y) в генеральной совокупности объёма N задано как :

X/Y	b_1	b_2	$\dots$	b_s
a_1	$\frac{N_{11}}{N}$	$\frac{N_{12}}{N}$	$\dots$	$\frac{N_{1s}}{N}$
a_2	$\frac{N_{21}}{N}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_k	$\frac{N_{k1}}{N}$	$\dots$	$\dots$	$\frac{N_{ks}}{N}$

где $\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{s} N_{ij} = N$.

12. a) The distribution of the characteristic X in the general population of volume N is given by :

$\sum_{i=1}^{k} N_i = N$. Let $\overline{A}$ and $D(A)$ denote the general mean and variance of characteristic X respectively:

From the general population, a random non-repeated selection of n elements is made: $X_1, X_2, \dots X_n$. Non-repeated selection means that the selected elements are not returned to the general population. We denote the arithmetic mean $\overline{X}$ of characteristic X in a random non-repeated sample as:

Find the mathematical expectation $E\left(\overline{X}\right)$ and the variance $D\left(\overline{X}\right)$ of the arithmetic mean $\overline{X}$ of characteristic X in a random non-repeated sample of the volume n from the original general population of the volume N.

b.) Let the distribution of characteristic X in the general population of the volume N be given as the Bernoulli distribution, $0 < N_1 < N$, p - the general fraction of the value a_1:

Similarly to item a) from the general population a non-repeated selection of n elements is made randomly: $X_1, X_2, \dots X_n$. Let us denote the arithmetic mean $\overline{X} = \hat{p}_n$ (sample fraction of the value a_1) of the characteristic X in a random non-repeated sample as:

Find the mathematical expectation $E(\hat{p}_n)$ and the variance $D(\hat{p}_n)$ of the sample fraction $\hat{p}_n$ of the value a_1 in a random non-repeated sample of the volume n from the original general population of the volume N.

c.) Let the distribution of the two-dimensional characteristic (X, Y) in the general population of the volume N be given by:

where $\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{s} N_{ij} = N$.

Обозначим $\overline{A}$, $\overline{B}$ и $D(A)$, $D(B)$ генеральные средние и дисперсии признаков X и Y:

Let $\overline{A}$, $\overline{B}$ and $D(A)$, $D(B)$ denote the general means and variances of the characteristics X and Y respectively.

$$\overline{A} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s} N_{ij}a_i}{N} \qquad D(A) = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s} N_{ij}\left(a_i - \overline{A}\right)^2}{N}.$$

$$\overline{B} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s} N_{ij}b_j}{N} \qquad D(B) = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s} N_{ij}\left(b_i - \overline{B}\right)^2}{N}.$$

Обозначим $COV(A, B)$ - генеральную ковариацию двумерного признака (X, Y):

Let $COV(A, B)$ denote the general covariance of the two-dimensional characteristic (X, Y):

$$COV(A, B) = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s} N_{ij}\left(a_i - \overline{A}\right)\left(b_j - \overline{B}\right)}{N}.$$

Из двумерной генеральной совокупности производится случайный бесповторный выбор n элементов: (X_1, Y_1),(X_2, Y_2),... (X_n, Y_n). Как и раньше обозначим средние арифметические $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ признаков X и Y в случайной бесповторной выборке как:

From the two-dimensional general population, a non-repeated selection of n elements is made randomly: (X_1, Y_1),(X_2, Y_2),... (X_n, Y_n). As before, we denote the arithmetic mean $\overline{X}$ and $\overline{Y}$ of characteristics X and Y in a random non-repeated sample as:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \qquad \overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$$

Найдите ковариацию выборочных средних $COV\left(\overline{X}, \overline{Y}\right)$ признака (X, Y) в случайной бесповторной выборке объема n из первоначальной двумерной генеральной совокупности объема N.

Find the covariance of sample averages $COV\left(\overline{X}, \overline{Y}\right)$ of the two-dimensional characteristic (X, Y) in a random non–repeated sample of the olume n from the original two-dimensional general population of the volume N.

13. Пусть функция алгебры логики f от трех переменных задана вектором своих значений: $f(x_1, x_2, x_3) = (0111\ 1110)$. Найти сложность $L(f)$ реализации функции f при помощи схем из функциональных элементов в базисе $B = \{x \vee y,\ x \cdot y,\ \overline{x}\}$

13. Let f be a Boolean function of three variables and it has the following vector of values: $f(x_1, x_2, x_3) = (01111110)$. Find complexity $L(f)$ of Boolean function f in the class of Boolean circuits over the basis $B = \{x \vee y,\ x \cdot y,\ \overline{x}\}$.

14. В наличии имеется N производственных деталей. Обозначим долю бракованных деталей θ $(0 \leq \theta \leq 1)$. Для приближенного определения $\hat{\theta}$ этой доли из первоначальной совокупности объема N производится случайная выборка n деталей без возвращения. Случайная выборка без возвращения означает, что случайно отобранные элементы обратно в набор не возвращаются. По результатам анализа выборки из n деталей оказалось, что число бракованных деталей в выборке составляет a штук. Найдите методом максимального правдоподобия оценку $\hat{\theta}$ доли бракованных деталей в первоначальной выборке объёма N.

14. There are N production parts (original set). Let us denote the fraction of defective production parts as θ $(0 \leq \theta \leq 1)$. For an approximate determination of this proportion $\hat{\theta}$, a random non-repeated selection of n parts from the original set of volume N is made. Non-repeated selection means that the selected parts are not returned to the original set. Based on the analysis of the n parts sample, the number of defective parts in the sample is found to be a pieces. Using the Maximum Likelihood method find an estimate $\hat{\theta}$ of the proportion of the defective parts in the original set of the volume N.