Алгебра. Второй курс. Семинар 6

Задача 1. Пусть V, W - векторные пространства размерности n и m соответственно, $\phi : V \to V$, $\psi : W \to W$ - линейные отображения. Рассмотрим линейное отображение $\phi \otimes \psi : V \otimes W \to V \otimes W$, $(\phi \otimes \psi)(v \otimes w) = \phi(v) \otimes \psi(w)$. Докажите формулы
(а) $tr(\phi \otimes \psi) = tr(\phi)tr(\psi)$.
(б) $\det(\phi \otimes \psi) = \det(\phi)^m \det(\psi)^n$.

Задача 2. Пусть V, W - конечномерные векторные пространства. Рассмотрим отображение Сегре:

$$\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(V \otimes W), \quad (L, L') \mapsto L \otimes L'.$$

(а) Докажите, что отображение Сегре является вложением (т.е. инъективно).
(б) Докажите, что образ отображения Сегре задается системой алгебраических уравнений в однородных координатах на $\mathbb{P}(V \otimes W)$. (Указание: какими уравнениями описывается множество матриц ранга ≤ 1?)

Задача 3. Пусть V, W - векторные пространства. Рассмотрим линейное отображение

$$\phi : V^* \otimes W \to Hom(V, W), \quad \phi(f, w)(v) = f(v)w.$$

(а) Докажите, что ϕ - вложение.
(б) Докажите, что ϕ - изоморфизм тогда и только тогда, когда одно из пространств V, W является конечномерным.

Задача 4. Пусть S, T - множества, $Fun(S, K)$, $Fun(T, K)$ - векторные пространства функций на S и T со значениями в поле K. Рассмотрим отображение

$$\phi : Fun(S, K) \otimes Fun(T, K) \to Fun(S \times T, K), \quad \phi(f, g)(s, t) = f(s)g(t).$$

(а) Докажите, что ϕ - вложение.
(б) Докажите, что ϕ - изоморфизм тогда и только тогда, когда одно из множеств S, T является конечным.

Задача 5. Пусть V - векторное пространство над полем комплексных чисел. Обозначим через $V_{\mathbb{R}}$ то же пространство, но рассматриваемое как векторное пространство над $\mathbb{R}$. Также, пусть $\overline{V}$ - векторное пространство над полем комплексных чисел, совпадающее с V как абелева группа, а умножение на комлексные числа в котором, определено по формуле $\lambda \cdot v = \lambda v$.

Постройте канонический (т.е. независящий от выбора базиса) изоморфизм

$$V_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq V \oplus \overline{V}.$$