Алгебра. Второй курс. Вопросы к первой контрольной работе

Письменная контрольная работа назначена на 22 октября, 12:00-14:00. Она будет состоять из одного теоретического вопроса и 4 задач. “Автомат” можно получить, если предварительно сдать все задачи из двух листочков.

Теоретические вопросы.

1. Расширение полей. Степень расширения. Минимальный многочлен. Подполе, порожденные множеством. Строение примитивных (т.е. порожденных одним элементом) алгебраических расширений. [Л] §VII.1.
2. Алгебраические и транцендентные числа. Конечные и алгебраические расширения полей. [Л] §VII.1.
3. Алгебраически замкнутое поле. Вывод существования алгебраического замыкания из Леммы Цорна. [Л] §VII.2
4. Описание гомоморфизмов из примитивного расширения. Теорема о продолжении гомоморфизма в алгебраически замкнутое поле поле. [Л] стр. 196
5. Поле разложения многочлена: существование и единственность с точностью до изоморфизма. [Л] §VII.3
6. Сепарабельные и несепарабельные расширения. Критерий несепарабельности неприводимого много- члена. [Л] §VII.4.
7. Теорема о примитивном элементе. [Л] §VII.6.
8. Расширения Галуа. Различные определения расширения Галуа и их равносильность. [Л] §VIII.1.
9. Сопряженные элементы и корни минимального многочлена в расширении Галуа. [Л] §VIII.1
10. Соответствие Галуа и Основная теорема теории Галуа. [Л] §VIII.1
11. Корни из единицы, круговые многочлены и циклотомические расширения. [Л] §VIII.3.
12. Циклические расширения. [Л] §VIII.6. 13. Разрешимость уравнение в радикалах. Критерий разрешимости над полем нулевой характеристики. [Л] §VIII.7.
14. Конечные поля. Дайте какое-то описание, докажите единственность с точностью до изоморфизма, опишите автоморфизм Фробениуса и дайте описание всей группы автоморфизмов конечного поля. [Л] §VII.5.
15. Трансцендентные расширения, базис и степень трансцендентности. Корректность определения степени. [Л] §VII.1.
16. Тензорное произведение векторных пространств. [Г] §I.

Список литературы. [Г] А. Л. Городенцев, Алгебра для студентов-математиков. Часть II. [Л] С. Ленг, Алгебра // Мир 1968г.

Задачи.

В качестве подготовки к контрольной работе, я рекомендую прорешать задачи из списка ниже (большая часть задач замствована из семинарских листочков).

Задача 1. Найдите минимальный многочлен $\exp\frac{2\pi i}{5}$ над $\mathbb{Q}$, над $\mathbb{Q}(i)$ и над $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

Задача 2. Докажите, что любое алгебраическое расширение конечного поля нормально.

Задача 3. Докажите, что для любого простого p и $0 \neq a \in \mathbb{F}_p$, многочлен $x^p - x - a$ неприводим $\mathbb{F}_p[x]$.

Задача 4. Найдите степени расширениий

(а) $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{2}) : \mathbb{Q}]$

(б) $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} + \sqrt{2}) : \mathbb{Q}]$

(в) $[\mathbb{Q}(\exp\frac{2\pi i}{p^n}) : \mathbb{Q}]$, где p - простое число, а n - натуральное.

(г) $[\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{p^n}) : \mathbb{Q}]$, где p - простое число, а n - натуральное.

Задача 5. Сколько корней имеет многочлен $y^4 - 2$ в поле $\mathbb{Q}[x]/(x^4 - 2)$?

Задача 6. Является ли кольцо $\mathbb{F}_3[x]/(x^4 - 2)$ полем?

Задача 7. Пусть α - комплексное число такое, что $\deg_{\mathbb{Q}} \alpha = 4$. Является ли α квадратичной иррациональностью. Докажите, что это всегда так или приведите контрпример.

Задача 8. (а) Докажите, что с помощью циркуля и линейки нельзя построить правильный 7-угольник.

(б) А можно ли построить правильный 9-угольник?

Задача 9. Для каждого из перечисленных ниже полей опишите все вложения этого поля в поле комплексных чисел (т.е. выберете базис в поле, как в векторном пространстве над $\mathbb{Q}$, и опишите образы базисных векторов при каждом вложении)

(а) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

(б) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$

(в) Поле разложения многочлена $x^3 - 2$.

(г) Поле разложения многочлена $x^4 - 2$.

Задача 10. Опишите группы автоморфизмов полей, перечисленных в задаче 9.

Задача 11. Пусть $n_1, \cdots, n_m$ - попарно взаимно простые натуральные числа, никакое из которых не является полным квадратом. Докажите, что

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{n_1}, \cdots, \sqrt{n_m}) : \mathbb{Q}] = 2^m.$$

(Используйте индукцию по m. Пусть $K_i = \mathbb{Q}(\sqrt{n_1}, \cdots, \sqrt{n_i})$, $(i = 1, \cdots m)$. В предположении, что степень K_{m-1} над $\mathbb{Q}$ равна 2^{m-1}, опишите группу G автоморфизмов поля K_{m-1}. Если бы $\sqrt{n_m} \in K_{m-1}$, элемент $\sqrt{n_m}$ был бы собственным вектором для всех $g \in G$.)

Задача 12. Пусть $K \subset L$ - алгебраическое расширение (возможно, бесконечное). Докажите, что любой эндоморфизм поля L, тождественный на K, является автоморфизмом.

Задача 13. (а) Пусть $L \supset K$ - поле разложения многочлена $f(x) \in K[x]$. Докажите, что любой неприводимый над K многочлен, $g(x) \in K[x]$, который имеет в L хотя бы один корень, разлагается в $L[x]$ на линейные множители. Алгебраические расширения с таким свойством называются нормальными.

(б) Докажите, что любое конечное нормальное расширение является полем разложения некоторого многочлена.

Задача 14. Для конечного расширения $K \subset L$ обозначим через $\{L : K\}$ число вложений поля L в алгебраическое замыкание $\overline{K}$ поля K, тождественных на K. Докажите, что для башни расширений $F \subset K \subset L$ выполняется равенство

$$\{K : F\}\{L : K\} = \{L : F\}.$$

Задача 15. Пусть $F \subset K \subset L$ - алгебраические расширения.

(а) Предположим, что $F \subset K$ и $K \subset L$ - нормальные расширения. Правда ли, что $F \subset L$ - нормальное расширение?

(б) Предположим, что $F \subset K$ и $K \subset L$ - сепарабельные расширения. Правда ли, что $F \subset L$ - сепарабельное расширение?

Задача 16. Пусть $\alpha \in \overline{K}$ и $\beta \in \overline{K}$ - различные корни сепарабельного полинома[1] $f(x) \in K[x]$ степени $d > 1$. Докажите, что

$$[K(\alpha + \beta) : K] \leq \frac{d(d-1)}{2}.$$

Задача 17. Пусть $\mathbb{C}()$ - поле рациональных функций над комплексными числами, а $K \subset \mathbb{C}()$ - подполе, содержащее $\mathbb{C}$ и несовпадающее с ним. Доказать, что $K \subset \mathbb{C}()$ - алгебраическое расширение.

Задача 18. Пусть K и L - конечные поля. Докажите, что K можно вложить в L тогда и только тогда, когда $|L|$ - степень $|K|$.

Задача 19. (а) Докажите, что для любого $n > 0$ существует неприводимый многочлен $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ степени n.

(б) Сколько существует неприводимых многочленов $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ степени 5?

Задача 20. Поле K характеристики $p > 0$ называется совершенным, если гомоморфизм Фробениуса $F : K \to K$, $F(a) = a^p$, сюръективен. Докажите, что любой неприводимый многочлен над совершенным полем сепарабелен.

Задача 21. Предположим, что характеристика поля K отлична от 2. Докажите, что любое расширение $K \subset L$ степени 2 имеет вид $L = K(\sqrt{a})$ для некоторого $a \in K$.

Задача 22. Пусть p - нечетное простое число, $K \supset \mathbb{Q}$ - поле разложения многочлена $x^p - 1$.

(а) Вычислите группу Галуа K над $\mathbb{Q}$.

(б) Докажите, что K содержит единственное квадратичное подрасширение $K \supset F \supset \mathbb{Q}$, $[F : \mathbb{Q}] = 2$.

---

[1] Напомним, что полином $f(x) \in K[x]$ называется сепарабельным, если него нет кратных корней в алгебраическом замыкании $\overline{K}$ поля K.

(в) Найдите $a \in \mathbb{Q}$ такое, что $F = \mathbb{Q}(\sqrt{a})$. (Указание: существует единственный сюръективный гомоморфизм $\chi : \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \to \{1, -1\}$. Пусть $\beta \in K$ - произвольный элемент. Покажите, что если сумма

$$\sum_{g \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})} \chi(g) g(\beta)$$

отлична от 0, то в качестве a можно взять ее квадрат.)

Задача 23. Пусть простое число p имеет вид $2^n + 1$ для некоторого целого числа n, $K \supset \mathbb{Q}$ - поле разложения многочлена $x^p - 1$.

(а) Покажите, что существует цепочка подрасширений $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \cdots \subset F_n = K$ такая, что $[F_i : F_{i-1}] = 2$.

(б) Докажите, что правильный p-угольник можно построить с помощью циркуля и линейки.

Задача 24. Докажите, что группа Галуа поля разложения многочлена $x^5 - 6x + 3$ над $\mathbb{Q}$ изоморфна S_5. (Покажите, что многочлен $x^5 - 6x + 3$ неприводим над $\mathbb{Q}$ и имеет ровно 3 вещественных корня).

Задача 25. Допустим, что K содержит ровно n корней из 1 степени n. Докажите, что любое расширение Галуа $L \supset K$, с группой Галуа изоморфной $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, имеет вид $L = K(\sqrt[n]{a})$, для некоторого $a \in K$. (Пусть σ - образующая группы Галуа, а ϵ - примитивный корень из 1 степени n. Докажите, что существует элемент $0 \neq \alpha \in L$ такой, что $\sigma(\alpha) = \epsilon\alpha$.)

Задача 26. Пусть K - поле характеристики 0, а $f(x) \in K[x]$ - неприводимый полином. На лекции было доказано, что если уравнение $f(x) = 0$ разрешимо в радикалах, то группа Галуа поля разложения $f(x)$ разрешима. Докажите обратное утверждение: если группа Галуа поля разложения $f(x)$ разрешима, то уравнение $f(x) = 0$ разрешимо в радикалах.

Задача 27. Пусть $L \supset K$ - произвольное расширение полей. Множество элементов $u_1, u_2, \cdots, u_n \in L$ называется базисом трансцендентности L над K, если $u_1, u_2, \cdots, u_n$ алгебраически независимы над K и L является алгебраическим расширением поля $K(u_1, u_2, \cdots, u_n)$.

(а) Пусть $u_1, u_2, \cdots, u_n$ - базис трансцендентности L над K, а $v \in L$ - элемент, трансцендентный над $K(u_2, u_3, \cdots, u_n)$. Докажите, что
$v, u_2, \cdots, u_n$ - также базис трансцендентности.

(б) Докажите, что все базисы трансцендентности L над K (если они существуют) содержат одно и то же число элементов.

Задача 28. Пусть $K = F(u_0, u_1 \cdots, u_{n-1})$ - поле рациональных функций над некоторым полем F. Докажите, что группа Галуа поля разложения многочлена $f(x) = x^n + u_{n-1}x^{n-1} + \cdots + u_0 \in K[x]$ изоморфна S_n. В частности, при $n > 4$, общее уравнение степени n неразрешимо в радикалах.

Задача 29. Пусть L - поле разложения многочлена $f(x) \in K[x]$ из задачи 4, а $\alpha_i \in L$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$, - корни многочлена $f(x)$ в поле L. Докажите, что при любом $n > 1$ существует единственное подрасширение $L \supset F \supset K$ такое, что $[F : K] = 2$. Более того, $F = K(\sqrt{D})$, где D - дискриминант многочлена $f(x)$:

$$D = \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

Задача 30. (а) Докажите, что дискриминант многочлена $f(x) = x^3 + px + q$ равен $-4p^3 - 27q^2$.
(б) Существует ли нормальное расширение $\mathbb{Q} \subset F \subset \mathbb{R}$ такое, что $Gal(F/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$?
Задача 31. Пусть V, W - векторные пространства размерности n и m соответственно, $\phi : V \to V$, $\psi : W \to W$ - линейные отображения. Рассмотрим линейное отображение $\phi \otimes \psi : V \otimes W \to V \otimes W$, $(\phi \otimes \psi)(v \otimes w) = \phi(v) \otimes \psi(w)$. Докажите формулы
(а) $tr(\phi \otimes \psi) = tr(\phi) tr(\psi)$.
(б) $\det(\phi \otimes \psi) = \det(\phi)^m \det(\psi)^n$.
Задача 32. Пусть V, W - конечномерные векторные пространства. Рассмотрим отображение Сегре:

$$\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(V \otimes W), \quad (L, L') \mapsto L \otimes L'.$$

(а) Докажите, что отображение Сегре является вложением (т.е. инъективно).
(б) Докажите, что образ отображения Сегре задается системой алгебраических уравнений в однородных координатах на $\mathbb{P}(V \otimes W)$. (Указание: какими уравнениями описывается множество матриц ранга ≤ 1?)
Задача 33. Пусть V, W - векторные пространства. Рассмотрим линейное отображение

$$\phi : V^* \otimes W \to Hom(V, W), \quad \phi(f, w)(v) = f(v)w.$$

(а) Докажите, что ϕ - вложение.
(б) Докажите, что ϕ - изоморфизм тогда и только тогда, когда одно из пространств V, W является конечномерным.
Задача 34. Пусть S, T - множества, $Fun(S, K)$, $Fun(T, K)$ - векторные пространства функций на S и T со значениями в поле K. Рассмотрим отображение

$$\phi : Fun(S, K) \otimes Fun(T, K) \to Fun(S \times T, K), \quad \phi(f, g)(s, t) = f(s)g(t).$$

(а) Докажите, что ϕ - вложение.
(б) Докажите, что ϕ - изоморфизм тогда и только тогда, когда одно из множеств S, T является конечным.