

А. К. Погребков

**Введение в
функциональный
анализ**

Высшая школа экономики
1-й семестр 2018/2019 гг.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Лекция. Введение.	2
1.1. Некоторые стандартные определения	2
2. Лекция. Евклидово пространство. Нормированное пространство.	4
2.1. Евклидово пространство и ортогональные системы	4
2.2. Определение, связь с евклидовым пространством	5
2.3. Ограниченные линейные отображения	6
3. Лекция. Гильбертовы пространства	8
3.1. Определение и примеры	8
3.2. Ортогональная проекция	9
3.3. Сопряженное пространство	10
4. Лекция. Ортонормированные базисы	12
4.1. Лемма Рисса (продолжение)	12
4.2. Лемма Цорна	12
4.3. Ортонормированные базисы	13
4.4. Теорема Парсеваля	13
4.5. Ортогонализация Грама–Шмидта	15
5. Лекция. Сепарабельные гильбертовы пространства и тензорные произведения	16
5.1. Сепарабельные гильбертовы пространства	16
5.2. Тензорные произведения	17
6. Банаховы пространства	19
6.1. Определение и примеры банаховых пространств	19
6.2. Пространство ограниченных линейных операторов.	20
6.3. Сопряженное пространство, определение и примеры	21
6.4. Рефлексивные банаховы пространства.	22
7. Лекция. Теорема Хана–Банаха.	24
7.1. Теорема Хана–Банаха, вещественный случай	24
7.2. Теорема Хана–Банаха, комплексный случай	25
8. Лекция 8	26
8.1. Пространства \mathcal{S} и \mathcal{S}'	26
8.2. Примеры обобщенных функций	27

1. ЛЕКЦИЯ. ВВЕДЕНИЕ.

Функциональный анализ – анализ в бесконечномерных линейных пространствах. В этом смысле он представляет собой такое же обобщение математического анализа, как последний – обобщение элементарной математики. Для начала мы вспомним некоторые понятия математического анализа, необходимые для дальнейшего изложения.

1.1. Некоторые стандартные определения.

Определение 1.1. Векторным (линейным) пространством V называется упорядоченная четверка $(V, C, +, \cdot)$, где V – непустое множество элементов произвольной природы, которые называются векторами, C – поле, элементы которого называются скалярами (мы рассматриваем \mathbb{C}), операция $+$ – операция сложения, осуществляет отображение $V \times V \rightarrow V$, т.е. каждой паре векторов из V сопоставляет единственный элемент из V , называемый их суммой, $x + y$, и \cdot – операция умножения на скаляры, $C \times V \rightarrow V$, сопоставляющая каждому элементу λ поля C и каждому элементу x множества V единственный элемент множества V , обозначаемый $\lambda \cdot x$, причем заданные операции удовлетворяют следующим аксиомам – аксиомам линейного (векторного) пространства:

- (1) $x + y = y + x$ для любых $x, y \in V$ (коммутативность);
- (2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ для любых $x, y, z \in V$ (ассоциативность);
- (3) существует такой элемент $0 \in V$, что $x + 0 = x$ для любого $x \in V$, называемый нулевым вектором или просто нулем пространства V (существование нейтрального элемента относительно сложения);
- (4) для любого $x \in V$ существует такой элемент $-x \in V$, что $x + (-x) = 0$, называемый вектором, противоположным вектору x ;
- (5) для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ $x \in V$ выполнено $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ (ассоциативность умножения на скаляр);
- (6) для любого $x \in V$ выполнено $1 \cdot x = x$ (унитарность: умножение на нейтральный (по умножению) элемент поля \mathbb{C} сохраняет вектор).
- (7) для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ $x \in V$ выполнено $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (дистрибутивность умножения вектора на скаляр относительно сложения скаляров);
- (8) для любых $\alpha \in \mathbb{C}$ $x, y \in V$ выполнено $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (дистрибутивность умножения вектора на скаляр относительно сложения векторов).

Таким образом, операция сложения задает на множестве V структуру (аддитивной) абелевой группы. Векторные пространства, заданные на одном и том же множестве элементов, но над различными полями, будут различными векторными пространствами (например, множество пар действительных чисел \mathbb{R}^2 может быть двумерным векторным пространством над полем действительных чисел либо одномерным – над полем комплексных чисел). В случае, когда известно о каком поле и каких операциях идет речь, векторное пространство обозначается просто одной буквой, например V .

Определение 1.2. Метрическое пространство есть пара (M, d) , где M – множество, а d – числовая вещественная функция, которая определена на декартовом произведении $M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ и такова, что для любых $x, y, z \in M$:

- (1) $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ (аксиома тождества);
- (2) $d(x, y) = d(y, x)$ (аксиома симметрии);
- (3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (аксиома треугольника или неравенство треугольника).

При этом элементы множества M называются точками метрического пространства, а функция d называется метрикой.

Заметим, что из приведенных аксиом следует неотрицательность функции расстояния:

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y).$$

Значение $d(x, y)$ называется расстоянием между точками x и y в метрическом пространстве M .

Биекция между различными метрическими пространствами (M, d_M) и (Y, d_Y) , сохраняющая расстояния, называется **изометрией**, а сами пространства (M, d_M) и (Y, d_Y) – **изометричными**. Если M – подмножество множества X , то сужение $d_M = d_X|_M$ метрики d_X на множество M дает метрическое пространство (M, d_M) , которое называется подпространством пространства (X, d) .

Любое метрическое пространство обладает естественной **топологией**, базой для которой служит множество открытых шаров, то есть множеств следующего типа:

$$B(x; r) = \{y \in M \mid d(x, y) < r\},$$

где x – точка в M , r – положительное вещественное число, называемое радиусом шара. Множество O является **открытым**, если вместе с любой своей точкой оно содержит открытый шар с центром в этой точке. Две метрики, определяющие одну и ту же топологию, называются **эквивалентными**.

Пример 1.1. Пусть $M = C[0, 1]$ (вещественнозначные). Рассмотрим две метрики:

$$d_1(f, g) = \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|, \quad d_2(f, g) = \int_0^1 dx |f(x) - g(x)|.$$

Легко видеть, что $d_2 \leq d_1$.

Определение 1.3. Бесконечная последовательность $\{x_n\}$ в метрическом пространстве M , $x_n \in M$, называется **сходящейся** к элементу $x \in M$ тогда и только тогда, когда $d(x_n, x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Обозначение: $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} x$.

Определение 1.4. Последовательность $\{x_n\} \subset (M, d)$ называется **последовательностью Коши (или фундаментальной)** если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N , что для любых $m, n \geq N$ расстояние $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Определение 1.5. Метрическое пространство называется **полным**, если любая последовательность Коши в нем сходится к некоторому элементу этого пространства.

Любая сходящаяся последовательность является последовательностью Коши. Примеры полных метрических пространств: \mathbb{R} и \mathbb{C} .

Определение 1.6. Подпространство $V \subset M$ метрического пространства M называется **плотным** в M , если любой $x \in M$ является пределом последовательности элементов из V .

Определение 1.7. Функция $f(x)$ из метрического пространства (X, d) в метрическое пространство (Y, ρ) называется **непрерывной** в точке x , если $f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(x)$ для любой последовательности $x_n \xrightarrow{d} x$.

Пример 1.2. Рассмотрим $f_n(x)$, как на Рис. 1, и пусть d_1 и d_2 такие, как в Примере 1.1. Легко видеть, что $f_n \xrightarrow{d_2} 0$ при $n \rightarrow \infty$, а $d_1(f_m, f_n) = 1$ при всех $m \neq n$, так что тут сходимости нет. Это иллюстрирует тот факт, что тождественное отображение пространства $(C[0, 1], d_2)$ в $(C[0, 1], d_1)$ не непрерывно, а обратное отображение непрерывно.

Теорема 1.1. Если (M, d) – неполное метрическое пространство, то существует полное метрическое пространство (\overline{M}, d) , такое что M изометрично плотному подмножеству в \overline{M} .

Литература к лекции 1: М.Рид, Б.Саймон “Методы современной математической физики”, том 1, “Функциональный анализ”.

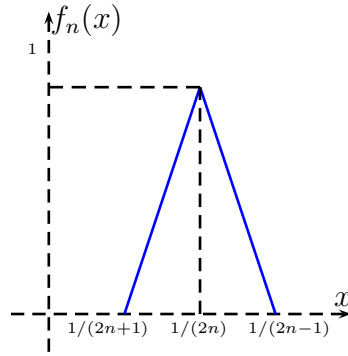


Рис. 1. Функция $f_n(x)$ из Примера 1.2.

2. ЛЕКЦИЯ. ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО. НОРМИРОВАННОЕ ПРОСТРАНСТВО.

2.1. Евклидово пространство и ортогональные системы.

Определение 2.1. *Комплексное векторное пространство V (т.е. векторное пространство V над полем \mathbb{C}) называется евклидовым или пространством со скалярным произведением, если на нем задано отображение*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \rightarrow \mathbb{C},$$

причем для любых $u, v, w \in V$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ выполнены следующие свойства:

- (1) $\langle v, v \rangle \geq 0$, причем $\langle v, v \rangle = 0$ тогда и только тогда, когда $v = 0$;
- (2) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$, $\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$;
- (3) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$.

Из свойств (2) и (3) следует, что

$$\langle u, \lambda v + \mu w \rangle = \lambda \langle u, v \rangle + \mu \langle u, w \rangle, \quad \langle \lambda u + \mu v, w \rangle = \overline{\lambda} \langle u, w \rangle + \overline{\mu} \langle v, w \rangle,$$

для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Пример 2.1. *Комплексное векторное пространство \mathbb{C}^n со скалярным произведением*

$$\langle u, v \rangle = \sum_{j=1}^n \overline{u_j} v_j.$$

Пример 2.2. *Пространство $C[a; b]$ непрерывных комплекснозначных функций на отрезке $[a; b]$ со скалярным произведением*

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b dx \overline{u(x)} v(x).$$

Нормой вектора $v \in V$ называется число $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Определение 2.2. *Векторы $u, v \in V$ ортогональны друг другу, если $\langle u, v \rangle = 0$, что обозначается $u \perp v$. Система векторов $\{v_j\}$ из V называется **ортонормированной**, если*

- (1) $\langle v_j, v_k \rangle = 0$ при всех $j \neq k$;
- (2) $\langle v_j, v_j \rangle = 1$ при всех j .

Легко видеть, что если $u \perp v$, то

$$(2.1) \quad \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Теорема 2.1 (Пифагор). Пусть $\{e_i\}_{i=1}^N$ есть ортонормированная система в евклидовом пространстве V , тогда для любого $v \in V$ имеет место равенство

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^N |\langle e_i, v \rangle|^2 + \left\| v - \sum_{i=1}^N \langle e_i, v \rangle e_i \right\|^2.$$

Доказательство. Представим v в виде

$$v = \sum_{i=1}^N \langle e_i, v \rangle e_i + \left(v - \sum_{i=1}^N \langle e_i, v \rangle e_i \right).$$

Векторы $\sum_{i=1}^N \langle e_i, v \rangle e_i$ и $v - \sum_{i=1}^N \langle e_i, v \rangle e_i$ ортогональны друг другу, а тогда доказательство следует из (2.1). ■

Следствие 2.1 (неравенство Бесселя). Если $\{e_i\}_{i=1}^N$ – ортонормированная система в евклидовом пространстве V , то для любого $v \in V$ справедливо неравенство

$$\|v\|^2 \geq \sum_{i=1}^N |\langle v, e_i \rangle|^2.$$

Следствие 2.2 (неравенство Коши–Буняковского). Для любых $u, v \in V$ справедливо неравенство

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

Доказательство. При $v = 0$ неравенство превращается в очевидное равенство. Если $\|v\| \neq 0$, то рассмотрим вектор $v/\|v\|$ с нормой равной 1. По неравенству Бесселя для любого $u \in V$ имеет место соотношение

$$\|u\|^2 \geq \left| \left\langle u, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \right|^2 = \frac{|\langle u, v \rangle|^2}{\|v\|^2},$$

что и доказывает утверждение этого следствия. ■

Следствие 2.3 (тождество параллелограмма). Для любых $u, v \in V$ имеет место тождество

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2,$$

иначе говоря, сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма, порожденного векторами u и v , равна сумме квадратов длин его сторон.

2.2. Определение, связь с евклидовым пространством.

Определение 2.3. Нормированное векторное пространство – векторное пространство V над некоторым полем C (мы будем рассматривать только $C = \mathbb{C}$) вместе с функцией $\|\cdot\|$, отображающей $V \rightarrow \mathbb{R}$ так, что выполнены аксиомы

- (1) $\|v\| \geq 0$ для любого $v \in V$;
- (2) $\|v\| = 0$ тогда и только тогда, когда $v = 0$;
- (3) $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$ для любых $v \in V$ и $\alpha \in C$;
- (4) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (неравенство треугольника).

Итак, любое нормированное пространство является метрическим с метрикой, задаваемой нормой:

$$d(u, v) = \|u - v\|,$$

т.е. в нормированных пространствах определены понятия сходимости и полноты, используемые в метрических пространствах.

Предложение 2.1. Любое евклидово пространство V является нормированным с нормой

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Доказательство. Пусть V – евклидово пространство. Свойства (1)–(3) нормы немедленно следуют из аналогичных свойств скалярного произведения на V . Свойство (4) вытекает из неравенства Коши–Буняковского:

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle = \langle u, u \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \leq \\ &\leq \langle u, u \rangle + 2|\langle u, v \rangle| + \langle v, v \rangle \leq \langle u, u \rangle + 2\sqrt{\langle u, u \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle} + \langle v, v \rangle = \\ &= \left(\sqrt{\langle u, u \rangle} + \sqrt{\langle v, v \rangle} \right)^2, \end{aligned}$$

что и доказывает свойство (3). ■

Замечание 2.1. Если норма определена через скалярное произведение, это скалярное произведение произвольных векторов $u, v \in V$ можно выразить в терминах квадратов нормы с помощью **поляризационного тождества**:

$$\langle u, v \rangle = \frac{\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2}{4} - i \frac{\|u + iv\|^2 - \|u - iv\|^2}{4},$$

что вовсе не означает, что с помощью этого равенства можно определить скалярное произведение в нормированном пространстве. Например, невозможно доказать свойство линейности.

2.3. Ограниченные линейные отображения.

Определение 2.4. Линейное отображение (оператор) $T: V_1 \rightarrow V_2$ из нормированного пространства V_1 с нормой $\|\cdot\|_1$ в нормированное пространство V_2 с нормой $\|\cdot\|_2$ называется **ограниченным**, если существует константа $C > 0$ такая, что

$$\|Tv\|_2 \leq C\|v\|_1 \quad \text{для всех } v \in V_1.$$

Наименьшая из таких констант C называется **нормой** $\|T\|$ оператора T , т.е.

$$\|T\| = \sup_{\|v\|_1=1} \|Tv\|_2.$$

Легко доказать следующее

Предложение 2.2. Пусть $T: V_1 \rightarrow V_2$ – линейное отображение из нормированного пространства V_1 в нормированное пространство V_2 . Следующие условия эквивалентны:

- (1) T непрерывно в одной точке V_1 ;
- (2) T непрерывно во всех точках V_1 ;
- (3) T ограничено.

Теорема 2.2 (об ограниченном линейном отображении). Пусть $T: V_1 \rightarrow V_2$ – ограниченное линейное отображение из нормированного пространства V_1 в **полное** нормированное пространство V_2 . Тогда T продолжается единственным образом на пополнение $\overline{V_1}$ пространства V_1 до ограниченного линейного отображения $\tilde{T}: \overline{V_1} \rightarrow V_2$.

Доказательство. Для каждого $v \in \overline{V_1}$ найдется последовательность $\{v_n\}$ векторов из V_1 такая, что $v_n \rightarrow v$ при $n \rightarrow \infty$. Последовательность $\{v_n\}$ является последовательностью Коши, поэтому для заданного $\varepsilon > 0$ можно найти такое N , что

$$\|v_n - v_m\|_1 < \frac{\varepsilon}{\|T\|} \quad \text{при } m, n > N.$$

Из оценки

$$\|Tv_n - Tv_m\|_2 = \|T(v_n - v_m)\|_2 \leq \|T\| \cdot \|v_n - v_m\|_1 < \varepsilon$$

следует, что $\{Tv_n\}$ является последовательностью Коши в V_2 . Ввиду полноты V_2 последовательность $\{Tv_n\}$ сходится к некоторому вектору $u \in V_2$.

Положим $Tv = u$ и покажем, что это определение не зависит от выбора последовательности $v_n \rightarrow v$. Действительно, если $v'_n \rightarrow v$ — другая последовательность векторов из V_1 , сходящаяся к v , то по доказанному последовательность $\{Tv'_n\}$ должна сходиться к некоторому вектору $u' \in V_2$. Но перемешанная последовательность $v_1, v'_1, v_2, v'_2, \dots$ также сходится к v . Поэтому по тем же соображениям, что и выше, последовательность образов $Tv_1, Tv'_1, Tv_2, Tv'_2, \dots$ должна иметь предел, откуда

$$u' = \lim_{n \rightarrow \infty} Tv'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Tv_n = u,$$

т.е. $u' = u$.

Продолженный оператор $\tilde{T}: \overline{V_1} \rightarrow V_2$ ограничен, поскольку

$$\|\tilde{T}v\|_2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} C\|v_n\|_1 = C\|v\|_1.$$

Не составляет труда проверить линейность и единственность построенного оператора \tilde{T} .

■

Литература к лекции 2: М.Рид, Б.Саймон “Методы современной математической физики”, том 1, “Функциональный анализ”.

3. ЛЕКЦИЯ. ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

3.1. Определение и примеры.

Определение 3.1. Полное евклидово пространство называется гильбертовым.

Определение 3.2. Два гильбертовых пространства H_1 и H_2 называются изоморфными, если существует линейный оператор U , отображающий биективно H_1 на H_2 такой, что

$$\langle Uv, Uw \rangle_{H_2} = \langle v, w \rangle_{H_1} \text{ для всех } v, w \in H_1.$$

Оператор U , обладающий указанным свойством, называется **унитарным**.

Пример 3.1 (Пространство $L_2(a, b)$). Определим пространство $L_2(a, b)$ как множество классов эквивалентности измеримых комплекснозначных функций на интервале (a, b) , для которых конечен интеграл

$$\int_a^b dx |f(x)|^2 < \infty$$

по мере Лебега. Скалярное произведение в $L_2(a, b)$ задается формулой

$$(3.1) \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b dx \overline{f(x)}g(x).$$

Оно корректно определено благодаря неравенству

$$|\overline{f(x)}g(x)| \leq \frac{|f(x)|^2}{2} + \frac{|g(x)|^2}{2},$$

из которого вытекает сходимость интеграла (3.1). Как известно из курса математического анализа, пространство $L_2(a, b)$ полно. Более того, оно совпадает с пополнением пространства $C[a, b]$ по норме

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b dx |f(x)|^2 \right)^{1/2}.$$

Пример 3.2 (Пространство ℓ^2). Это пространство состоит из последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ комплексных чисел x_n , удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty.$$

Скалярное произведение в ℓ^2 задается формулой

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n}y_n.$$

Полнота этого пространства проверяется непосредственно.

Пример 3.3 (прямая сумма). Прямой суммой гильбертовых пространств H_1 и H_2 называется гильбертово пространство $H_1 \oplus H_2$, состоящее из пар (v_1, v_2) , где $v_1 \in H_1$, $v_2 \in H_2$, наделенное скалярным произведением

$$\langle (u_1, u_2), (v_1, v_2) \rangle = \langle u_1, v_1 \rangle_{H_1} + \langle u_2, v_2 \rangle_{H_2}.$$

Пусть $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть последовательность гильбертовых пространств. **Прямой суммой**

$$H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} H_n$$

этих пространств называется гильбертово пространство, состоящее из последовательностей $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, $v_n \in H_n$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|_{H_n}^2 < \infty.$$

Естественное скалярное произведение в этом пространстве имеет вид

$$\langle \{u_n\}, \{v_n\} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u_n, v_n \rangle_{H_n}.$$

3.2. Ортогональная проекция. Пусть H есть гильбертово пространство и E – его замкнутое линейное подпространство. Тогда E , наделенное скалярным произведением, унаследованным из H , само является гильбертовым пространством. Обозначим через E^{\perp} подпространство, состоящее из векторов $u \in H$, ортогональных к E , т.е. удовлетворяющих условию: $\langle u, v \rangle = 0$ для всех $v \in E$. Это подпространство линейно и замкнуто (проверьте это!) и потому также является гильбертовым пространством с индуцированным скалярным произведением. Оно называется ортогональным дополнением к E .

Лемма 3.1. Для любого $v \in H$ найдется единственный вектор $w \in E$, ближайший к v .

Доказательство. Расстояние от v до подпространства E равно по определению

$$d = \inf_{u \in E} \|v - u\|.$$

Выберем последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $u_n \in E$, для которой $\|v - u_n\| \rightarrow d$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\|^2 &= \|(u_n - v) - (u_m - v)\|^2 = (\text{тождество параллелограмма}) \\ &= 2\|u_n - v\|^2 + 2\|u_m - v\|^2 - \|(u_n - v) + (u_m - v)\|^2 = \\ &= 2\|u_n - v\|^2 + 2\|u_m - v\|^2 - 4\left\|v - \frac{u_n + u_m}{2}\right\|^2 \leq \\ &\leq 2\|u_n - v\|^2 + 2\|u_m - v\|^2 - 4d^2 \quad \left(\text{поскольку } \frac{u_n + u_m}{2} \in E\right). \end{aligned}$$

Последнее выражение при $m, n \rightarrow \infty$ стремится к $2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0$. Следовательно, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть последовательность Коши, сходящаяся к некоторому элементу $w \in H$, который, ввиду замкнутости E , должен принадлежать E . При этом $\|v - w\| = d$, т.е. вектор w удовлетворяет условию леммы.

Если $w' \in E$ – другой элемент, удовлетворяющий условию $\|v - w'\| = d$, то перемешанная последовательность w, w', w, w', \dots должна сходиться к некоторому элементу из E (это доказывается также, как в первой части доказательства), откуда следует, что $w = w'$. ■

Теорема 3.1 (Об ортогональной проекции). Пусть H есть гильбертово пространство и E – его замкнутое линейное подпространство. Тогда любой элемент $v \in H$ однозначно представляется в виде

$$v = u + w,$$

где $u \in E$, $w \in E^{\perp}$.

Доказательство. Обозначим через u вектор из E , ближайший к v , и положим $w = v - u$. Покажем, что $w \in E^{\perp}$. Действительно, обозначим норму $\|v - u\|$ через d . Тогда для любого $z \in E$ и любого $t \in \mathbb{R}$ будем иметь

$$d^2 \leq \|v - (u + tz)\|^2 = \|w - tz\|^2 = d^2 - 2t \operatorname{Re}\langle w, z \rangle + t^2 \|z\|^2.$$

откуда $2t \operatorname{Re}\langle w, z \rangle \leq t^2 \|z\|^2$. Следовательно, $\operatorname{Re}\langle w, z \rangle = 0$. Проводя такое же рассуждение с заменой t на it , покажем, что и $\operatorname{Im}\langle w, z \rangle = 0$, т.е. $\langle w, z \rangle = 0$ для любых $z \in E$. Тем самым

$w \in E^\perp$. Если $v = u_1 + w_1$ – другое представление, удовлетворяющее условиям теоремы, то

$$u - u_1 = w_1 - w = z \in E \cap E^\perp,$$

откуда следует, что $\langle z, z \rangle = 0$, т.е. $z = 0$, а тогда и $u = u_1$, $w = w_1$. ■

Замечание 3.1. Из доказанной теоремы вытекает, что пространство H изоморфно прямой сумме $E \oplus E^\perp$, причем указанный изоморфизм задается отображением

$$E \oplus E^\perp \ni (u, w) \mapsto u + w \in H.$$

3.3. Сопряженное пространство.

Определение 3.3. Пространство непрерывных линейных функционалов на H , т.е. непрерывных линейных отображений $H \rightarrow \mathbb{C}$, называется пространством, сопряженным к H , и обозначается через H^* .

Лемма 3.2 (Лемма Рисса). Для любого непрерывного линейного функционала $f \in H^*$ найдется единственный элемент $\xi \in H$ такой, что

$$f(v) = \langle \xi, v \rangle \text{ для любого } v \in H.$$

Доказательство. Обозначим через N множество всех $v \in H$ таких, что $f(v) = 0$. Это множество линейно и замкнуто (ввиду непрерывности f), т.е. является замкнутым линейным подпространством в H . Если $N = H$, то в качестве ξ можно взять $\xi = 0$. Если же $N \neq H$, то по теореме об ортогональной проекции в N^\perp найдется ненулевой элемент ξ_0 . Заметим, что вектор $f(v)\xi_0 - f(\xi_0)v \in N$ для любого $v \in H$, поскольку функционал f на этом векторе равен нулю. Поэтому

$$0 = \langle \xi_0, f(v)\xi_0 - f(\xi_0)v \rangle = f(v)\langle \xi_0, \xi_0 \rangle - f(\xi_0)\langle \xi_0, v \rangle,$$

откуда $f(v)\langle \xi_0, \xi_0 \rangle = f(\xi_0)\langle \xi_0, v \rangle$. Следовательно, утверждение Леммы выполняется для вектора

$$\xi = f(\xi_0) \frac{\xi_0}{\langle \xi_0, \xi_0 \rangle}.$$

Единственность такого вектора ξ очевидна. ■

Замечание 3.2. Из доказательства леммы Рисса следует, что $H = N \oplus \{\lambda\xi_0 \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$, так как любой элемент $v \in H$ представляется в виде

$$v = \left(v - \frac{f(v)}{f(\xi_0)}\xi_0 \right) + \frac{f(v)}{f(\xi_0)}\xi_0 \in N \oplus \{\lambda\xi_0\}.$$

Замечание 3.3. Полезно иметь в виду также следующий комплексно-сопряженный вариант леммы Рисса. Пусть $f: H \rightarrow \mathbb{C}$ – сопряженно-линейный функционал на H , т.е. аддитивный функционал, удовлетворяющий условию: $f(\lambda v) = \bar{\lambda}f(v)$ для любых $\lambda \in \mathbb{C}$, $v \in H$. Тогда существует единственный элемент $\xi \in H$ такой, что $f(v) = \langle v, \xi \rangle$ для любого $v \in H$. Для доказательства достаточно применить лемму Рисса к функционалу \bar{f} .

Определение 3.4. Линейный функционал $f: H \rightarrow \mathbb{C}$ называется ограниченным, если существует константа $C > 0$ такая, что $|f(v)| \leq C\|v\|$ для всех $v \in H$. Наименьшая из таких констант C называется нормой функционала f и обозначается

$$\|f\|_{H^*} = \sup_{\|v\|=1} |f(v)|.$$

Это определение является ни чем иным, как спецификацией определения ограниченного линейного оператора на случай линейных отображений $H \rightarrow \mathbb{C}$. Также, как для линейных операторов, эквивалентны следующие утверждения:

- (1) линейный функционал f ограничен;
- (2) f непрерывен хотя бы в одной точке H
- (3) f непрерывен всюду на H .

Замечание 3.4 (дополнение к лемме Рисса).

$$(3.2) \quad \text{В условиях теоремы Рисса } \|f\|_{H^*} = \|\xi\|_H.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \|f\|_{H^*} &= \sup_{\|v\|=1} |f(v)| = \sup_{\|v\|=1} |\langle \xi, v \rangle| \leq \text{(неравенство Коши–Буняковского)} \\ &\leq \sup_{\|v\|=1} (\|\xi\| \cdot \|v\|) = \|\xi\|. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\|f\|_{H^*} = \sup_{\|v\|=1} |f(v)| \geq \left| f\left(\frac{\xi}{\|\xi\|}\right) \right| = \left| \left\langle \xi, \frac{\xi}{\|\xi\|} \right\rangle \right| = \|\xi\|.$$

Полученные оценки с противоположных сторон доказывают (3.2).

Литература к лекции 3: М.Рид, Б.Саймон “Методы современной математической физики”, том 1, “Функциональный анализ”.

4. ЛЕКЦИЯ. ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ БАЗИСЫ

4.1. Лемма Рисса (продолжение). С учетом (3.2) как следствие леммы Рисса, доказанной на предыдущей лекции, мы имеем:

Теорема 4.1. *Отображение*

$$H \ni \xi \mapsto f(v) = \langle \xi, v \rangle, \quad v \in H,$$

устанавливает сопряженно-линейную изометрию $\xi \mapsto f$ пространства H на сопряженное к нему пространство H^ .*

Еще одним следствием леммы Рисса является теорема о представлении полуторалинейных форм операторами.

Определение 4.1. *Функция $B: H \times H \rightarrow C$ называется полуторалинейной формой, если:*

- (1) *B антилинейна по первому аргументу, т.е. $B(\lambda u + \mu v, w) = \bar{\lambda}B(u, w) + \bar{\mu}B(v, w)$;*
- (2) *B линейна по второму аргументу, т.е. $B(u, \lambda v + \mu w) = \lambda B(u, v) + \mu B(u, w)$.*

Полуторалинейная форма ограничена, если для любых $u, v \in H$

$$(4.1) \quad |B(u, v)| \leq C \|u\| \cdot \|v\| \text{ для некоторой константы } C > 0.$$

Предложение 4.1. *Пусть B – ограниченная полуторалинейная форма на H . Тогда существует единственный ограниченный линейный оператор $T: H \rightarrow H$ такой, что*

$$B(u, v) = \langle Tu, v \rangle \text{ для любых } u, v \in H.$$

Доказательство. Фиксируем вектор $u \in H$. Тогда из определения ограниченной полуторалинейной формы следует, что $B(u, \cdot)$ является непрерывным линейным функционалом на H . Поэтому по лемме Рисса найдется единственный элемент $\xi \in H$ такой, что $B(u, v) = \langle \xi, v \rangle$ для любого $v \in H$. Положим $Tu = \xi$. Ясно, что $\|Tu\| \leq C \|u\|$, где C – константа из формулы (4.1). Кроме того, отображение T аддитивно и

$$\langle T(\lambda u), v \rangle = B(\lambda u, v) = \bar{\lambda}B(u, v) = \bar{\lambda}\langle Tu, v \rangle = \langle \lambda Tu, v \rangle$$

т.е. T линейно. Единственность построенного оператора T очевидна. ■

Замечание 4.1. *Норма оператора T , построенного в доказанном предложении, совпадает с наименьшей константой C из неравенства (4.1).*

4.2. Лемма Цорна.

Определение 4.2. *Частичным порядком на множестве X называется семейство упорядоченных пар (x, y) , где $x, y \in X$, обозначаемых через $x \prec y$, которое обладает следующими свойствами: 1. если $x \prec y$ и $y \prec z$, то $x \prec z$; 2. всегда $x \prec x$; 3. если одновременно $x \prec y$ и $y \prec x$, то $x = y$.*

Множество X с частичным порядком называется частично упорядоченным. Порядок называется **линейным**, если для любых $x, y \in X$ выполняется по крайней мере одно из следующих условий: либо $x \prec y$, либо $y \prec x$. Множество с таким порядком называется **линейно упорядоченным**.

Пусть X есть частично упорядоченное множество и Y – его подмножество. Элемент $x \in X$ называется **верхней гранью** множества Y , если $y \prec x$ для любого $y \in Y$. Максимальным элементом частично упорядоченного множества X называется такой его элемент x , что условие $x \prec y$ для некоторого $y \in X$ влечет $y = x$.

Лемма 4.1 (Лемма Цорна). *Пусть X – непустое частично упорядоченное множество такое, что любое его линейно упорядоченное подмножество имеет верхнюю грань. Тогда в X существует максимальный элемент.*

4.3. Ортонормированные базисы.

Определение 4.3. *Ортонормированным базисом в H называется полная ортонормированная система, т.е. ортонормированная система, которую нельзя расширить до содержащей ее ортонормированной системы.*

Теорема 4.2 (об ортонормированном базисе). *Любое гильбертово пространство H обладает ортонормированным базисом.*

Доказательство. Рассмотрим множество S всех ортонормированных систем в H . Оно непусто, поскольку содержит, например, ортонормированные системы, состоящие из единственного вектора вида $v/\|v\|$. Введем на S отношение частичного порядка: система $S_1 \prec$ система S_2 , если $S_1 \subset S_2$.

Если $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ есть линейно упорядоченное подмножество в S , то $\cup_{\alpha \in A} S_\alpha$ также является ортонормированной системой из S , содержащей все S_α , и потому является верхней гранью линейно упорядоченного подмножества $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$. По лемме Цорна S содержит максимальный элемент, который и является ортонормированным базисом в H .

4.4. Теорема Парсеваля. Прежде, чем переходить к формулировке этой теоремы, докажем следующий критерий сходимости попарно ортогональных векторов.

Предложение 4.2. *Пусть $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ есть последовательность попарно ортогональных векторов из H . Тогда выполнение любого из трех следующих условий влечет за собой выполнение остальных двух:*

- (1) ряд $\sum_{n=1}^\infty v_n$ сходится по норме H ;
- (2) $\sum_{n=1}^\infty \|v_n\|^2 < \infty$;
- (3) ряд $\sum_{n=1}^\infty \langle v_n, u \rangle$ сходится при каждом $u \in H$.

Доказательство. Так как $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ при $i \neq j$, то для любых $n, m, \leq m$, выполняется равенство:

$$\|v_n + \dots + v_m\|^2 = \|v_n\|^2 + \dots + \|v_m\|^2.$$

Отсюда следует, что условия (1) и (2) в этом случае эквивалентны. Если выполняется условие (2), то частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^\infty \|v_n\|^2$ образуют последовательность Коши в H , которая, ввиду полноты H , имеет предел. Применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем, что условие (3) в этом случае выполняется.

Предположим теперь, что выполнено условие (3). Рассмотрим последовательность линейных функционалов $f_n \in H^*$, задаваемых равенством

$$f_n(u) = \sum_{i=1}^n \langle v_i, u \rangle, \quad u \in H.$$

По условию последовательность $\{f_n(u)\}_{n=1}^\infty$ сходится при каждом $u \in H$. Поэтому по теореме Банаха–Штейнгауза (она будет доказана позднее) последовательность норм $\{\|f_n(\cdot)\|\}_{n=1}^\infty$ ограничена. Но

$$\|f_n(\cdot)\| = \|v_1 + \dots + v_n\| = (\|v_1\|^2 + \dots + \|v_n\|^2)^{1/2}$$

Поэтому из условия (3) вытекает условие (2), а следовательно, и условие (1).

Теорема 4.3 (Теорема Парсеваля). *Пусть $S = \{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ есть ортонормированный базис в гильбертовом пространстве H . Тогда любой элемент $v \in H$ представляется в виде*

$$(4.2) \quad v = \sum_{\alpha \in A} e_\alpha \langle e_\alpha, v \rangle,$$

причем

$$(4.3) \quad \|v\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |\langle e_\alpha, v \rangle|^2$$

Доказательство. По неравенству Бесселя для любого конечного подмножества $a \subset A$ выполняется соотношение

$$\sum_{\alpha \in a} |\langle v, e_\alpha \rangle|^2 \leq \|v\|^2.$$

Отсюда следует, что $\langle v, e_\alpha \rangle \neq 0$ для не более, чем счетного множества индексов $\alpha \in A$. Действительно, обозначим через a_1 множество индексов $\alpha \in A$, для которых $|\langle v, e_\alpha \rangle| \geq 1$, через a_2 множество индексов $\alpha \in A$, для которых $1 > |\langle v, e_\alpha \rangle| \geq 1/2$ и т.д. Каждое из этих множеств конечно, в противном случае нарушалось бы предыдущее неравенство. Тогда множество $\cup_{n=1}^{\infty} a_n$ счетно и исчерпывает все множество индексов $\alpha \in A$, для которых $\langle v, e_\alpha \rangle \neq 0$. Занумеруем теперь через $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ все индексы из A , для которых $\langle e_\alpha, v \rangle \neq 0$. Тогда последовательность частичных сумм

$$\sum_{j=1}^n |\langle e_{\alpha_j}, v \rangle|^2$$

монотонно возрастает с номером n , оставаясь ограниченной числом $\|v\|^2$. Поэтому при $n \rightarrow \infty$ она стремится к некоторому конечному пределу. Обозначим через v_n частичную сумму вида

$$v_n = \sum_{j=1}^n e_{\alpha_j} \langle e_{\alpha_j}, v \rangle.$$

Тогда при $m > n$ будем иметь

$$\|v_n - v_m\|^2 = \left\| \sum_{j=n+1}^m e_{\alpha_j} \langle e_{\alpha_j}, v \rangle \right\|^2 = \sum_{j=n+1}^m |\langle e_{\alpha_j}, v \rangle|^2.$$

Тем самым, последовательность $\{v_n\}$ является последовательностью Коши, которая сходится к некоторому элементу $v_0 \in H$. При этом

$$\langle e_{\alpha_j}, v - v_0 \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle e_{\alpha_j}, v - \sum_{k=1}^n e_{\alpha_k} \langle e_{\alpha_k}, v \rangle \right\rangle = \langle e_{\alpha_j}, v \rangle - \langle e_{\alpha_j}, v \rangle = 0,$$

при любом $j = 1, 2, \dots$. С другой стороны, если индекс α таков, что $\alpha \neq \alpha_j$ ни при каком j , то также

$$\langle e_\alpha, v - v_0 \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle e_\alpha, v - \sum_{k=1}^n e_{\alpha_k} \langle e_{\alpha_k}, v \rangle \right\rangle = 0,$$

поскольку для такого α по построению $\langle e_\alpha, v \rangle = 0$. Следовательно, элемент $v - v_0$ ортогонален всем элементам e_α базиса S , откуда вытекает, ввиду максимальнойности S , что $v - v_0 = 0$, т.е.

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n e_{\alpha_j} \langle e_{\alpha_j}, v \rangle,$$

что доказывает формулу (4.2).

Кроме того, имеем следующую цепочку равенств

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| v - \sum_{j=1}^n e_{\alpha_j} \langle e_{\alpha_j}, v \rangle \right\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle v - \sum_{j=1}^n e_{\alpha_j} \langle e_{\alpha_j}, v \rangle, v - \sum_{j=1}^n e_{\alpha_j} \langle e_{\alpha_j}, v \rangle \right\rangle = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \|v\|^2 - \sum_{j=1}^n \langle v, e_{\alpha_j} \rangle \langle e_{\alpha_j}, v \rangle - \sum_{j=1}^n \langle e_{\alpha_j}, v \rangle \langle v, e_{\alpha_j} \rangle + \sum_{j=1}^n \langle e_{\alpha_j}, v \rangle \langle v, e_{\alpha_j} \rangle \right\} = \\ &= \|v\|^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n |\langle e_{\alpha_j}, v \rangle|^2 = \|v\|^2 - \sum_{\alpha \in A} |\langle e_\alpha, v \rangle|^2, \end{aligned}$$

что доказывает формулу (4.3). ■

Определение 4.4. *Ряд, задаваемый формулой (4.2), называется рядом Фурье вектора v по базису S , а его коэффициенты – коэффициентами Фурье вектора v относительно базиса S . Равенство (4.3) называется равенством Парсеваля.*

4.5. Ортогонализация Грама–Шмидта. Ортогонализацией Грама–Шмидта называется

конструкция, позволяющая построить по любой заданной последовательности линейно независимых векторов ортонормированную систему. Допустим, что нам дана последовательность u_1, u_2, \dots , состоящая из линейно независимых векторов. Положим $w_1 = u_1$ и $v_1 = w_1/\|w_1\|$. Далее рассмотрим векторы $w_2 = u_2 - v_1\langle v_1, u_2 \rangle$ и $v_2 = w_2/\|w_2\|$. Продолжая указанный процесс построения, на n -м шаге построим векторы

$$w_n = u_n - \sum_{j=1}^{n-1} v_j \langle v_j, u_n \rangle \quad \text{и} \quad v_n = \frac{w_n}{\|w_n\|}.$$

Иными словами, на n -м шаге вектор u_n проектируется на подпространство, натянутое на ранее построенные векторы v_1, \dots, v_{n-1} , в результате чего разность w_n – вектор, ортогональный линейной оболочке векторов v_1, \dots, v_{n-1} .

Литература к лекции 4: М.Рид, Б.Саймон “Методы современной математической физики”, том 1, “Функциональный анализ”.

5. ЛЕКЦИЯ. СЕПАРАБЕЛЬНЫЕ ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА И ТЕНЗОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

5.1. Сепарабельные гильбертовы пространства.

Определение 5.1. *Метрическое пространство называется сепарабельным, если оно обладает счетным плотным подмножеством.*

Теорема 5.1. *Гильбертово пространство H сепарабельно тогда и только тогда, когда оно имеет счетный ортонормированный базис. Если этот базис состоит из N векторов, то H изоморфно \mathbb{C}^N . Если он состоит из счетного набора векторов, то H изоморфно ℓ^2 .*

Доказательство. Допустим сначала, что H сепарабельно и $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ – счетное плотное подмножество в H . Выбрасывая, если нужно, из этого подмножества некоторые векторы, можно считать, что подмножество $\{v_n\}$ состоит из линейно независимых векторов, линейная оболочка которых (т.е. совокупность конечных линейных комбинаций) плотна в H . Применяя к последовательности $\{v_n\}$ процесс ортогонализации Грама–Шмидта, построим из нее счетный ортонормированный базис в H .

Обратно, если $S = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис в H , то по теореме Парсеваля множество конечных линейных комбинаций векторов e_n плотно в H . То же самое верно и для множества конечных линейных комбинаций этих векторов с рациональными коэффициентами, а это множество уже счетно. Тем самым, H сепарабельно. Пусть, теперь, H сепарабельно и $S = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – его счетный ортонормированный базис. Рассмотрим отображение

$$U : H \rightarrow \ell_2, \quad v \mapsto \{\langle e_n, v \rangle\}_{n=1}^{\infty}.$$

Из теоремы Парсеваля следует, что это отображение корректно определено и сюръективно, а равенство Парсеваля показывает, что оно унитарно, т.е. U – изоморфизм H на ℓ_2 . Если базис S состоит из конечного числа N элементов, то это же рассуждение показывает, что H изоморфно \mathbb{C}^N . ■

Пример 5.1 (Ряд Фурье периодической функции). *Рассмотрим в качестве гильбертова пространства $H = L^2(0, 2\pi)$. Выберем в нем ортонормированный базис, задаваемый функциями*

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Для того, чтобы удостовериться в том, что $\{\varphi_n\}$ действительно образуют ортонормированный базис, достаточно проверить полноту этой системы (ее ортонормированность очевидна). Покажем, что если некоторая функция $g \in L^2(0, 2\pi)$ ортогональна всем функциям φ_n , т.е. $\langle e^{inx}, g \rangle = 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, то $g = 0$. Заметим, что из условия ортогональности следует, что g ортогональна всем периодическим непрерывно дифференцируемым функциям $\varphi \in C_{\text{пер}}^1[0, 2\pi]$. Действительно, для таких функций φ их ряд Фурье

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}, \quad c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \varphi(x) e^{-inx} dx,$$

равномерно сходится к функции φ , поэтому его можно почленно интегрировать, откуда следует, что $\langle \varphi, g \rangle = 0$. Но, как легко показать, функции из $C_{\text{пер}}^1[0, 2\pi]$ плотны в $L_2(0, 2\pi)$, поэтому функция g ортогональна всему пространству $L_2(0, 2\pi)$. Следовательно, $g = 0$. Итак, $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ есть ортонормированный базис в пространстве $L_2(0, 2\pi)$, поэтому из теоремы Парсеваля следует, что ряд Фурье любой функции из $L_2(0, 2\pi)$ сходится к ней по норме этого пространства.

5.2. Тензорные произведения. Пусть H_1, H_2 – гильбертовы пространства. Будем временно обозначать элементы их прямой суммы $H_1 \oplus H_2$ через $u_1 \oplus u_2$, где $u_1 \in H_1, u_2 \in H_2$. Для $v_1 \in H_1, v_2 \in H_2$ обозначим через $v_1 \otimes v_2$ билинейную форму на пространстве $H_1 \oplus H_2$, задаваемую равенством

$$(v_1 \otimes v_2)(u_1 \oplus u_2) = \langle v_1, u_1 \rangle \langle v_2, u_2 \rangle, \text{ где } u_1 \in H_1, \quad u_2 \in H_2.$$

Определим скалярное произведение на формах указанного вида посредством

$$\langle v_1 \otimes v_2, v'_1 \otimes v'_2 \rangle = \langle v_1, v'_1 \rangle \langle v_2, v'_2 \rangle.$$

Обозначим через E линейную оболочку (т.е. множество конечных линейных комбинаций) форм такого вида и продолжим на него введенное скалярное произведение по линейности. Множество E называется алгебраическим тензорным произведением пространств H_1 и H_2 .

Покажем, что указанное скалярное произведение корректно определено на E , т.е. не зависит от представления вектора из E в виде конечной линейной комбинации форм вида $v_1 \otimes v_2$. Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что если $w = \sum_{i=1}^N c_i(u_i \otimes v_i)$ – конечная линейная комбинация, представляющая нулевую форму на $H_1 \oplus H_2$, то ее скалярное произведение с любой формой z из E равно нулю. Так как форма $z \in E$, то она представляется в виде

$$z = \sum_{k=1}^n a_k(x_k \otimes y_k), \text{ где } x_k \in H_1, \quad y_k \in H_2.$$

Тогда получаем цепочку соотношений

$$\begin{aligned} \langle w, z \rangle &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^N a_k \bar{c}_i \langle u_i \otimes v_i, x_k \otimes y_k \rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^N a_k \langle c_i u_i, x_k \rangle \langle v_i, y_k \rangle = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^N a_k (c_i u_i \otimes v_i)(x_k \oplus y_k) = \sum_{k=1}^n a_k w(x_k \oplus y_k) = 0. \end{aligned}$$

где $w(x_k \oplus y_k) = 0$, поскольку w по условию задает нулевую форму на $H_1 \oplus H_2$. Покажем теперь, что построенное скалярное произведение на E положительно определено. Пусть $w = \sum_{i=1}^N c_i(u_i \otimes v_i)$ – произвольная форма из E . Векторы $\{u_i\}_{i=1}^N$ и $\{v_i\}_{i=1}^N$ порождают линейные подпространства $U \subset H_1$ и $V \subset H_2$, соответственно. Выберем в этих подпространствах ортонормированные базисы $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ и $\{\psi_i\}_{i=1}^N$ соответственно и разложим векторы u_i и v_i по этим базисам. В результате получим

$$u_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} \varphi_j, \quad v_i = \sum_{j=1}^N b_{ij} \psi_j,$$

так что

$$w = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} (\varphi_i \otimes \psi_j)$$

с некоторыми коэффициентами c_{ij} . Тогда

$$\begin{aligned} \langle w, w \rangle &= \left\langle \sum_{i,j} c_{ij} (\varphi_i \otimes \psi_j), \sum_{k,l} c_{kl} (\varphi_k \otimes \psi_l) \right\rangle = \\ &= \sum_{i,j} \sum_{k,l} \bar{c}_{ij} c_{kl} \langle \varphi_i, \varphi_k \rangle \langle \psi_j, \psi_l \rangle = \sum_{ij} |c_{ij}|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Кроме того, равенство $\langle w, w \rangle = 0$, эквивалентно тому, что все $c_{ij} = 0$, т.е. $w = 0$. Следовательно, скалярное произведение положительно определено.

Определение 5.2. Гильбертово тензорное произведение $H_1 \otimes H_2$ есть пополнение алгебраического тензорного произведения E по введённому скалярному произведению.

Предложение 5.1. Если $\{u_i\}_{i=1}^\infty$ и $\{v_j\}_{j=1}^\infty$ – ортонормированные базисы в гильбертовых пространствах H_1 и H_2 соответственно, то $\{u_i \otimes v_j\}_{i,j=1}^\infty$ есть ортонормированный базис в тензорном произведении $H_1 \otimes H_2$.

Доказательство. Так как система $\{u_i \otimes v_j\}$ является, очевидно, ортонормированной в $H_1 \otimes H_2$, то достаточно показать, что замкнутая линейная оболочка S элементов $\{u_i \otimes v_j\}$ содержит алгебраическое тензорное произведение E . Пусть форма $w = u \otimes v \in E$, где $u \in H_1$, $v \in H_2$. Так как $\{u_i\}$ и $\{v_j\}$ являются базисами в пространствах H_1 и H_2 соответственно, то

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i u_i, \quad v = \sum_{j=1}^{\infty} b_j v_j,$$

причем $\sum_i |a_i|^2 < \infty$ и $\sum_j |b_j|^2 < \infty$, а тогда и $\sum_{i,j} |a_i b_j| < \infty$. Поэтому по теореме Парсеваля ряд

$$\sum_{i,j} a_i b_j (u_i \otimes v_j)$$

сходится к некоторому вектору из S . Но этот вектор должен совпадать с w , поскольку

$$\left\| u \otimes v - \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} a_i b_j (u_i \otimes v_j) \right\| \rightarrow 0$$

при $N_1, N_2 \rightarrow \infty$. Следовательно, $w \in S$. ■

Литература к лекции 5: М.Рид, Б.Саймон “Методы современной математической физики”, том 1, “Функциональный анализ”.

6. БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА

6.1. Определение и примеры банаховых пространств.

Определение 6.1. Полное нормированное пространство называется банаховым.

Пример 6.1 (Пространство $L^\infty(\mathbb{R})$). Пространство $L^\infty(R)$ состоит из классов эквивалентности (относительно меры Лебега) измеримых функций f на вещественной прямой \mathbb{R} , для которых существует константа $C > 0$ такая, что $|f(x)| < C$ почти всюду по мере Лебега. Наименьшая из таких констант C называется нормой f и обозначается $\|f\|_\infty$.

Пространство $L^\infty(\mathbb{R})$ является банаховым с нормой $\|\cdot\|_\infty$. Оно содержит подпространство $C_b(\mathbb{R})$ ограниченных непрерывных функций на R и ограничение нормы $\|\cdot\|_\infty$ на $C_b(\mathbb{R})$ совпадает с обычной суп-нормой

$$\|f\|_{C_b(\mathbb{R})} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$$

на $C_b(\mathbb{R})$. Очевидно, подпространство $C_b(\mathbb{R})$ плотно в $L^\infty(\mathbb{R})$.

Рассмотрим подпространство $C_{\text{fin}}(\mathbb{R})$, состоящее из непрерывных функций на R с компактными носителями. Это нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_\infty$, которое, однако, не является полным. Его пополнение по норме $\|\cdot\|_\infty$ совпадает с пространством $C_0(\mathbb{R})$ непрерывных функций на \mathbb{R} , стремящихся к нулю на бесконечности.

Пример 6.2 (Пространство $L^p(M, d\mu)$). Пусть (M, \mathcal{R}, μ) – пространство с мерой. При $p \geq 1$ обозначим через $L^p(M, d\mu)$ множество классов эквивалентности (относительно меры μ) измеримых функций на M , удовлетворяющих условию

$$\|f\|_p := \left(\int_M |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} < \infty.$$

Это пространство обладает следующими свойствами:

- (1) если $f, g \in L^p(M, d\mu)$, то $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ (неравенство Минковского);
- (2) если p, q, r – положительные числа ≥ 1 , связанные соотношением $1/r = 1/p + 1/q$, то произведение fg функций $f \in L^p(M, d\mu)$ и $g \in L^q(M, d\mu)$ принадлежит пространству $L^r(M, d\mu)$ и $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$ (неравенство Гельдера);
- (3) пространство $L^p(M, d\mu)$ полно (теорема Рисса-Фишера).

Доказательство теоремы Рисса-Фишера. Пусть $\{f_n\}$ – последовательность Коши в L^p . Выберем подпоследовательность такую, что $\|f_n - f_{n+1}\|_p \leq 2^{-n}$. Введем

$$g_m(x) = \sum_{n=1}^m |f_n(x) - f_{n+1}(x)|.$$

Последовательность $\{g_m\}$ монотонна. Поскольку $\|g_m\|_p \leq \sum_{n=1}^m \|f_n(x) - f_{n+1}(x)\|_p \leq 1$, то предел этой последовательности существует и удовлетворяет $g_\infty \in L^p$. Но тогда $|g_\infty(x)| < \infty$ почти всюду. Отсюда последовательность $f_{m+1}(x) = f_1(x) - \sum_{n=1}^m (f_n(x) - f_{n+1}(x))$ сходится поточечно почти всюду к некоторой функции $f(x)$. При этом по неравенству Минковского $\|f_{m+1}\|_p \leq \|f_1\|_p + \|g_\infty\|_p$, так что по теореме о мажорированной сходимости $f \in L^p$. ■

Из приведенных свойств вытекает, что $L^p(M, d\mu)$ является банаховым пространством с нормой $\|f\|_p$.

Пример 6.3 (Пространство ℓ_p). Пусть $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ обозначает последовательность комплексных чисел. По аналогии с пространствами функций можно рассмотреть следующие пространства последовательностей:

$$\begin{aligned}\ell^{\infty} &= \{x : \|x\|_{\infty} = \sup_n |x_n| < \infty\}; \\ \ell^p &= \{x : \|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} < \infty\}, \quad p \geq 1, \\ c_0 &= \{x : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\} \subset \ell^{\infty}, \\ c_{\text{fin}} &= \{x : x_n = 0 \text{ для всех } n, \text{ кроме конечного числа.}\}\end{aligned}$$

Очевидно, $c_{\text{fin}} \subset \ell_p \subset c_0 \subset \ell^{\infty}$. Нетрудно доказать следующие свойства этих пространств. Пространства ℓ^{∞} и c_0 банаховы с нормой $\|\cdot\|_{\infty}$. Пространство ℓ_p банахово с нормой $\|\cdot\|_p$. Пространство c_{fin} плотно в ℓ_p (по норме $\|\cdot\|_p$, $p < \infty$) и плотно в c_0 (по норме $\|\cdot\|_{\infty}$). Кроме того, множество элементов c_{fin} , состоящих лишь из рациональных чисел, плотно в ℓ_p и в c_0 . Поскольку это множество счетно, ℓ_p и c_0 сепарабельны. Пространство ℓ^{∞} не сепарабельно.

6.2. Пространство ограниченных линейных операторов. Обозначим через $B(X, Y)$ векторное пространство ограниченных линейных операторов $T : X \rightarrow Y$, действующих из нормированного пространства X в нормированное пространство Y . Введем в $B(X, Y)$ операторную норму, полагая

$$\|T\| = \sup_{v \in X \setminus 0} \frac{\|Tv\|_Y}{\|v\|_X}.$$

Это превращает $B(X, Y)$ в нормированное пространство.

Предложение 6.1. Пространство $B(X, Y)$ банахово, если Y банахово.

Доказательство. Покажем, что если $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность Коши в $B(X, Y)$, то существует ограниченный линейный оператор $T : X \rightarrow Y$ такой, что $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Для любого $v \in X$ последовательность $\{T_n v\}_{n=1}^{\infty}$ является последовательностью Коши в полном пространстве Y . Поэтому последовательность векторов $\{T_n v\}$ сходится при $n \rightarrow \infty$ к некоторому вектору $w \in Y$. Положим $Tv := w$. Определенный таким образом оператор T , очевидно, линеен. Покажем, что он также ограничен. Действительно, так как $\{T_n\}$ является последовательностью Коши в нормированном пространстве $B(X, Y)$, то она ограничена. Следовательно, найдется константа $C > 0$ такая, что при любом n справедлива оценка

$$\sup_{\|v\| \leq 1} \frac{\|T_n v\|}{\|v\|} = \|T_n\| \leq C,$$

откуда $\|T_n v\| \leq C$ при любом n и любом v с нормой $\|v\| \leq 1$. Следовательно, $\|Tv\| \leq C$ при любом v с нормой $\|v\| \leq 1$, т.е. оператор T ограничен.

Для того, чтобы показать, что $\|T - T_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, заметим, что

$$\|(T - T_n)v\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|(T_m - T_n)v\|,$$

поэтому

$$\frac{\|(T - T_n)v\|}{\|v\|} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\|(T_m - T_n)v\|}{\|v\|} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|T_m - T_n\|,$$

т.е. $\|T - T_n\| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|T_m - T_n\|$. Так как правую часть последнего неравенства можно сделать сколь угодно малой при достаточно большом n , то $\|T - T_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. ■

Определение 6.2. Ограниченный линейный оператор $T : X \rightarrow Y$ из нормированного пространства X в нормированное пространство Y называется изоморфизмом, если T является биективным отображением с ограниченным обратным. Если этот оператор к тому же сохраняет норму, то он называется изометрией.

Например, мы показали ранее, что любое сепарабельное гильбертово пространство изометрично ℓ^2 .

Определение 6.3. Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на нормированном пространстве X называются эквивалентными, если существуют положительные константы C_1 и C_2 такие, что

$$C_1\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq C_2\|v\|_1.$$

Например, все следующие нормы в \mathbb{R}^n эквивалентны:

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2},$$

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max\{|x_i|\}_{i=1}^n.$$

С другой стороны, пополнение пространства c_{fin} по норме $\|\cdot\|_1$ совпадает с c_0 , а его пополнение по норме $\|\cdot\|_p$ есть ℓ^p .

6.3. Сопряженное пространство, определение и примеры. В Предложении 6.1 из предыдущего параграфа было показано, что пространство $B(X, Y)$ ограниченных линейных операторов из банахова пространства X в банахово пространство Y само является банаховым. В случае, когда $Y = \mathbb{C}$, пространство $B(X, \mathbb{C})$ состоит из ограниченных линейных функционалов $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ и называется сопряженным пространством X^* к пространству X . Напомним, что норма ограниченного линейного функционала $f \in X^*$ определяется формулой

$$\|f\| = \sup_{v \in X, \|v\| \leq 1} |f(v)|.$$

Пример 6.4 (Пространство L^p). Пусть $1 < p < \infty$ и $1/p + 1/q = 1$. Если $f \in L^p(\mathbb{R})$ и $g \in L^q(\mathbb{R})$, то по неравенству Гельдера $fg \in L_1(\mathbb{R})$ и потому определен интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx.$$

Сопоставим функции $g \in L^q(\mathbb{R})$ линейный функционал

$$G(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx$$

на пространстве $L_p(\mathbb{R})$. По неравенству Гельдера G является ограниченным линейным функционалом на $L^p(\mathbb{R})$ с нормой, не превосходящей $\|g\|^q$.

Обратное утверждение также верно: любой ограниченный линейный функционал на $L^p(\mathbb{R})$ имеет вид $f \mapsto G(f)$ для некоторой функции $g \in L^q(\mathbb{R})$. Кроме того, разным функциям из $L^q(\mathbb{R})$ отвечают различные функционалы на $L^p(\mathbb{R})$, т.е. отображение

$$L^q(\mathbb{R}) \ni g \mapsto G \in L^p(\mathbb{R})^*$$

устанавливает линейную изометрию пространства $L^q(\mathbb{R})$ на пространство $L^p(\mathbb{R})^*$. Иначе говоря, $L^p(\mathbb{R})^* = L^q(\mathbb{R})$. В случае $p = 2$ имеем $q = 2$ и $L^2(\mathbb{R})^* = L^2(\mathbb{R})$, т.е. пространство $L^2(\mathbb{R})$ сопряжено самому себе. Из леммы Рисса следует, что это свойство выполняется для любых гильбертовых пространств.

Пример 6.5 (Пространства c_0 и ℓ^p). Напомним, что пространство c_0 состоит из последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ комплексных чисел, стремящихся к нулю. Если последовательность $f = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежит ℓ^1 , то ей можно сопоставить линейный функционал

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x_n$$

на пространстве c_0 с нормой, равной $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$.

Покажем, что все ограниченные линейные функционалы на c_0 имеют указанный вид. Действительно, пусть $f \in c_0^*$ и e^n – вектор из c_0 , у которого на n -ом месте стоит 1, а на остальных местах нули. Положим

$$f_n := f(e^n)$$

и

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{|f_n|}{f_n} e^n,$$

где “штрих” у знака суммы означает, что в ней нужно опустить все члены с $f_n = 0$. Иначе говоря,

$$S_N = \left(\frac{|f_1|}{f_1}, \frac{|f_2|}{f_2}, \dots, \frac{|f_N|}{f_N}, 0, \dots \right)$$

(где опущены члены с $f_n = 0$). Тогда $S_N \in c_0$ и $\|S_N\|_{c_0} = 1$. Так как

$$f(S_N) = \sum_{n=1}^N |f_n|$$

и

$$|f(S_N)| \leq \|S_N\|_{c_0} \|f\|_{c_0^*} = \|f\|_{c_0^*},$$

то

$$\|f\|_{c_0^*} \geq \sum_{n=1}^N |f_n|.$$

Следовательно, и

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \leq \|f\|_{c_0^*},$$

откуда $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| < \infty$, т.е.

$$F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n x_n$$

является корректно определенным ограниченным линейным функционалом на пространстве c_0 . Более того, F совпадает с f на конечных линейных комбинациях векторов e^n . Так как такие линейные комбинации плотны в c_0 , то $F = f$. Следовательно, любой ограниченный линейный функционал из c_0^* порождается некоторым элементом из ℓ^1 . При этом нормы в c_0^* и ℓ^1 совпадают, т.е. $c_0^* = \ell^1$. Аналогичное рассуждение показывает, что $(\ell^1)^* = \ell^\infty$.

6.4. Рефлексивные банаховы пространства. Так как пространство X^* , сопряженное к банахову пространству X , снова является банаховым, то и второе сопряженное пространство $(X^*)^* = X^{**}$ также банахово. В Примере 6.5 из предыдущего параграфа мы показали, что $c_0^* = \ell^1$, а $(\ell^1)^* = \ell^\infty$, откуда следует, что вторым сопряженным пространством к пространству c_0 является пространство $\ell^\infty \ni c_0$.

Предложение 6.2. Пусть X – банахово пространство. Сопоставим вектору $v \in X$ линейный функционал v^* на пространстве X^* (т.е. $v^* \in X^{**}$), задаваемый формулой

$$X^* \ni f \mapsto v^*(f) := f(v).$$

Отображение $v \mapsto v^*$ задает изометрию пространства X на некоторое подпространство в X^{**} .

Доказательство. Так как

$$|v^*(f)| = |f(v)| \leq \|f\|_{X^*} \|v\|_X;$$

то v^* является ограниченным линейным функционалом на X^* с нормой, не превосходящей $\|v\|_X$: $\|v^*\|_{X^{**}} \leq \|v\|_X$. Из теоремы Хана–Банаха (которую мы докажем на следующей лекции) следует, что для заданного $v \in X$ всегда существует функционал $f_0 \in X^*$ такой, что

$$\|f_0\|_{X^*} = 1 \text{ и } f_0(v) = \|v\|_X.$$

Поэтому

$$\|v^*\|_{X^{**}} = \sup_{f: \|f\|_{X^*}=1} |v^*(f)| \geq |v^*(f_0)| = \|v\|_X;$$

что вместе с доказанным выше противоположным неравенством дает $\|v^*\|_{X^{**}} = \|v\|_X$. Следовательно, отображение $v \mapsto v^*$ является изометрией X на образ этого отображения в пространстве X^{**} . ■

Определение 6.4. Если отображение $X \rightarrow X^{**}$, $v \mapsto v^*$, построенное в предыдущем Предложении, сюръективно, т.е. X изометрично X^{**} , то банахово пространство X называется рефлексивным.

Например, пространства $L^p(\mathbb{R})$ с $1 < p < \infty$ рефлексивны, а пространство c_0 не рефлексивно, поскольку $c_0^{**} = \ell^\infty \supset c_0$.

Литература к лекции 6: М.Рид, Б.Саймон “Методы современной математической физики”, том 1, “Функциональный анализ”.

7. ЛЕКЦИЯ. ТЕОРЕМА ХАНА–БАНАХА.

Здесь мы доказываем один из основных результатов функционального анализа – теорему Хана–Банаха. Доказательство нам придется делать в два шага: сначала мы докажем эту теорему для вещественного векторного пространства, а потом обобщим ее на комплексное.

7.1. Теорема Хана–Банаха, вещественный случай.

Теорема 7.1. Пусть X – вещественное векторное пространство, p – вещественная функция, определенная на X и удовлетворяющая условию $p(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha p(x) + (1 - \alpha)p(y)$ для всех $x, y \in X$, $\alpha \in [0, 1]$. Предположим, что λ – линейный функционал, определенный на подпространстве $Y \subset X$ и удовлетворяющий неравенству $\lambda(x) \leq p(x)$ для всех $x \in Y$. Тогда существует линейный функционал Λ , определенный на X , такой, что $\Lambda(x) \leq p(x)$ для всех $x \in X$ и $\Lambda(x) = \lambda(x)$ для всех $x \in Y$.

Доказательство. Идея доказательства состоит в следующем. Сначала покажем, что если $z \in X$, но $z \notin Y$, то λ можно продолжить на пространство, натянутое на z и Y . А потом воспользуемся рассуждением по лемме Цорна и покажем, что подобный процесс позволяет продолжить λ на все пространство X .

Пусть \tilde{Y} – подпространство, натянутое на Y и z . Пусть $\tilde{\lambda}$ – продолжение λ на \tilde{Y} , оно будет описано, коль скоро мы определим $\tilde{\lambda}(z)$, т.к.

$$\tilde{\lambda}(uz + y) = u\tilde{\lambda}(z) + \lambda(y), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Пусть $y_1, y_2 \in Y$ и пусть $\alpha, \beta > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \beta\lambda(y_1) + \alpha\lambda(y_2) &= \lambda(\beta y_1 + \alpha y_2) = (\alpha + \beta)\lambda\left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}y_1 + \frac{\alpha}{\alpha + \beta}y_2\right) \leq \\ &\leq (\alpha + \beta)p\left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}(y_1 - \alpha z) + \frac{\alpha}{\alpha + \beta}(y_2 + \beta z)\right) \leq \\ &\leq \beta p(y_1 - \alpha z) + \alpha p(y_2 + \beta z). \end{aligned}$$

Значит, для всех $\alpha, \beta > 0$ и $y_1, y_2 \in Y$

$$\frac{1}{\alpha}[-p(y_1 - \alpha z) + \lambda(y_1)] \leq \frac{1}{\beta}[p(y_2 + \beta z) - \lambda(y_2)],$$

а потому существует такое вещественное a , что

$$\sup_{\substack{y \in Y \\ \alpha > 0}} \frac{1}{\alpha}[-p(y - \alpha z) + \lambda(y)] \leq a \leq \inf_{\substack{y \in Y \\ \alpha > 0}} \frac{1}{\alpha}[p(y + \alpha z) - \lambda(y)].$$

Положим тогда $\tilde{\lambda}(z) = a$. Легко видеть, что полученное продолжение удовлетворяет неравенству $\tilde{\lambda}(x) \leq p(x)$ при всех $x \in \tilde{Y}$. Итак, мы показали, что λ за один шаг может быть продолжено на одно измерение.

Для завершения доказательства воспользуемся леммой Цорна. Пусть \mathcal{E} – набор расширений e функционала λ , удовлетворяющих условию $e(x) \leq p(x)$ на тех подпространствах, где они определены. Введем в \mathcal{E} частичное упорядочение, положив $e_1 \prec e_2$, если e_2 определено на большем множестве, чем e_1 и $e_2(x) = e_1(x)$ там, где они оба определены. Пусть $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – линейно упорядоченное подмножество в \mathcal{E} ; пусть X_α – то подпространство, на котором определено e_α . Определим e на $\cup_{\alpha \in A} X_\alpha$, положив $e(x) = e_\alpha(x)$, если $x \in X_\alpha$. Очевидно, что $e_\alpha \prec e$, так что всякое линейно упорядоченное подмножество в \mathcal{E} имеет верхнюю грань. В силу леммы Цорна \mathcal{E} содержит максимальный элемент Λ , определенный на некотором множестве X' и удовлетворяющий условию $\Lambda(x) \leq p(x)$ при $x \in X'$. Но X' должно совпадать со всем X , так как в противном случае мы могли бы продолжить Λ на более широкое пространство, добавляя, как и выше, еще одно измерение. Поскольку это

противоречит максимальнойности Λ , должно быть $X = X'$. Значит расширение Λ определено всюду.

7.2. Теорема Хана–Банаха, комплексный случай.

Теорема 7.2. Пусть X – комплексное векторное пространство, p – вещественная положительная функция, определенная на X и удовлетворяющая условию $p(\alpha x + \beta y) \leq |\alpha|p(x) + |\beta|p(y)$ при любых $x, y \in X$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ таких, что $|\alpha| + |\beta| = 1$. Пусть λ – комплексный линейный функционал, определенный на подпространстве $Y \subset X$ и удовлетворяющий условию $|\lambda(x)| \leq p(x)$ при любом $x \in Y$. Тогда существует комплексно линейный функционал Λ , определенный на X , удовлетворяющий условию $|\Lambda(x)| \leq p(x)$ при любом $x \in X$ и такой, что $\Lambda(x) = \lambda(x)$ при $x \in Y$.

Доказательство. Положим $\ell(x) = \operatorname{Re}\{\lambda(x)\}$, так что ℓ – вещественно линейный функционал на Y и, поскольку

$$\ell(ix) = \operatorname{Re}\{\lambda(ix)\} = \operatorname{Re}\{i\lambda(x)\} = -\operatorname{Im}\lambda(x),$$

то $\lambda(x) = \ell(x) - i\ell(ix)$. Т.к. ℓ – вещественно линейен и $p(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha p(x) + (1 - \alpha)p(y)$ при любом $\alpha \in [0, 1]$, то существует вещественно линейное расширение L на все X , удовлетворяющее условию $L(x) \leq p(x)$. Положим $\Lambda(x) = L(x) - iL(ix)$. По построению это – вещественно линейный функционал, являющийся расширением функционала λ . Но поскольку $\Lambda(ix) = L(ix) - iL(-x) = i\Lambda(x)$, то Λ – комплексно линейен. Осталось доказать, что $|\Lambda(x)| \leq p(x)$. Заметим, что $p(\alpha x) \leq p(x)$ для любого α такого, что $|\alpha| = 1$. Обозначим $\theta = \operatorname{Arg}(\Lambda(x))$. Тогда в силу равенства $\operatorname{Re}\Lambda = L$, имеем:

$$\begin{aligned} |\Lambda(x)| &= e^{-i\theta}\Lambda(x) = \Lambda(e^{-i\theta}x) = \operatorname{Re}\Lambda(e^{-i\theta}x) = \\ &= L(e^{-i\theta}x) \leq p(e^{-i\theta}x) \leq p(x), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Следствие 7.1. Пусть X – нормированное линейное пространство, Y – его подпространство, линейный функционал $\lambda \in Y^*$. Тогда существует линейный функционал $\Lambda \in X^*$, продолжающий λ и удовлетворяющий $\|\Lambda\|_{X^*} = \|\lambda\|_{Y^*}$.

Доказательство. Следует непосредственно из теоремы Хана–Банаха, если положить $p(x) = \|\lambda\|_{Y^*}\|y\|$.

Следствие 7.2. Пусть y – элемент нормированного линейного пространства X . Тогда существует ненулевой линейный функционал $\Lambda \in X^*$ такой, что $\Lambda(y) = \|\Lambda\|_{X^*}\|y\|$.

Доказательство. Пусть Y – подпространство, натянутое на y . Положим $\lambda(ay) = a\|y\|$. По предыдущему следствию существует функционал Λ , расширяющий λ на все X с нормой $\|\Lambda\|_{X^*} = \|\lambda\|_{Y^*} = 1$, где последнее равенство следует по определению λ . Но $\Lambda(y) = \|y\|$, откуда следует утверждение этого Следствия.

Литература к лекции 7: М.Рид, Б.Саймон “Методы современной математической физики”, том 1, “Функциональный анализ”.

8. ЛЕКЦИЯ 8

8.1. Пространства \mathcal{S} и \mathcal{S}' . Банаховы пространства обладают многими свойствами евклидовых: это векторные пространства, норма в них определяет понятие расстояния, а всякая последовательность Коши имеет предел. Хороший пример использования этих пространств дает теория обобщенных функций, которую мы кратко рассмотрим здесь. В описании обобщенных функций банаховы пространства возникают следующим образом. Введем пространство $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (для простоты изложения мы рассматриваем функции одной переменной) бесконечно дифференцируемых функций, убывающих на бесконечности вместе со всеми своими производными быстрее любой обратной степени x (говорят также: быстрее любого полинома). Введем в \mathcal{S} счетное число норм, определенных как

$$(8.1) \quad \|\phi\|^{(p)} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ \alpha \leq p}} (1 + x^2)^{p/2} |\partial_x^\alpha \phi(x)|, \quad p = 0, 1, \dots$$

Очевидно, что

$$(8.2) \quad \|\phi\|^{(0)} \leq \|\phi\|^{(1)} \leq \|\phi\|^{(2)} \leq \dots$$

Зададим сходимость в \mathcal{S} следующим образом:

Определение 8.1. Последовательность функций ϕ_1, ϕ_2, \dots из \mathcal{S} сходится к нулю, $\phi_k \rightarrow 0$ в \mathcal{S} при $k \rightarrow \infty$, если для всех $p = 0, 1, \dots$ последовательности $\|\phi_k\|^{(p)} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Иными словами: $\phi_k \rightarrow 0$ в \mathcal{S} при $k \rightarrow \infty$, если $x^\beta \partial_x^\alpha \phi(x)$ сходится к нулю при всех $\beta, \alpha = 0, 1, \dots$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$.

Пусть \mathcal{S}_p означает пополнение \mathcal{S} по p -ой норме. Каждое \mathcal{S}_p – банахово пространство и справедливы вложения:

$$\mathcal{S}_0 \supset \mathcal{S}_1 \supset \mathcal{S}_2 \supset \dots,$$

причем каждое вложение $\mathcal{S}_{p+1} \subset \mathcal{S}_p$ непрерывно в силу (8.2). Можно доказать, что это вложение вполне непрерывно (компактно), т.е. из всякого бесконечного ограниченного множества в \mathcal{S}_{p+1} можно выбрать последовательность, сходящуюся в \mathcal{S}_p .

Теорема 8.1. \mathcal{S} – полное пространство и $\mathcal{S} = \bigcap_{p \geq 0} \mathcal{S}_p$.

Доказательство. Пусть f_k – последовательность Коши по каждой из норм $\|\cdot\|^{(p)}$, что означает что $x^p \partial_x^\alpha f_k(x) \rightarrow g_{p,\alpha}(x)$ при $k \rightarrow \infty$ и всех $p, \alpha = 0, 1, \dots$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$. Обозначим $g = g_{0,0}$ и докажем, что $g(x)$ непрерывно дифференцируема и $g' = g_{0,1}$. Действительно,

$$f_k(x) = f_k(0) + \int_0^x dt f_k'(t),$$

и ввиду равномерности стремления $f_k' \rightarrow g_{0,1}$ имеем

$$g(x) = g(0) + \int_0^x dt g_{0,1}(t),$$

так что $g \in C^1$ и $g' = g_{0,1}$. Повторяя этот процесс, получаем, что $g_{p,\alpha}(x) = x^p \partial_x^\alpha g(x)$ и в топологии пространства \mathcal{S} предел $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = g$. Теорема доказана.

Определение 8.2. Топологически сопряженное пространство к $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (т.е. множество непрерывных линейных функционалов на $\mathcal{S}(\mathbb{R})$), обозначаемое как $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, называется пространством обобщенных функций (распределений) умеренного роста.

В теории обобщенных функций для значения обобщенной функции $f \in \mathcal{S}'$ на основной функции $\varphi \in \mathcal{S}$ принято обозначение

$$(f, \varphi),$$

причем в отличие от определения скалярного произведения здесь имеется линейность по обоим аргументам.

Сходимость в пространстве \mathcal{S}' определяется как **слабая** сходимость: последовательность обобщенных функций f_1, f_2, \dots из \mathcal{S}' называется сходящейся к обобщенной функции $f \in \mathcal{S}'$ (обозначение: $f_n \rightarrow f$ в \mathcal{S}' при $n \rightarrow \infty$), если для любого $\varphi \in \mathcal{S}$ выполнено

$$(f_n, \varphi) \rightarrow (f, \varphi).$$

Ниже мы покажем, что для того, чтобы линейный функционал f на \mathcal{S} был непрерывен, должна существовать норма $\|\cdot\|^{(p)}$ такая, что $|(f, \varphi)| \leq C\|\varphi\|^{(p)}$ для всех $\varphi \in \mathcal{S}$. В обратную сторону это очевидно. Действительно, если имеется последовательность Коши $\{\varphi_k\}$ в \mathcal{S} , то она является последовательностью Коши для любой нормы $\|\cdot\|^{(p)}$. А тогда и (f, φ_k) в силу этого неравенства – последовательность Коши.

8.2. Примеры обобщенных функций. Пример 1. Регулярные обобщенные функции. Пусть $g \in \mathcal{S}$. Определим функционал $g(\cdot)$ на \mathcal{S} как

$$(8.3) \quad g(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx g(x)\varphi(x).$$

Он, очевидно, линеен и непрерывен, поскольку

$$|g(\varphi)| \leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R})} \|\varphi\|^{(0)}.$$

Таким образом мы получаем, что $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$. Аналогично можно показать, что $L^q \subset \mathcal{S}'$. Обобщенные функции, заданные интегралом (8.3), называются регулярными. Таким образом, с учетом обозначения введенного выше, имеем

$$(8.4) \quad (g, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx g(x)\varphi(x).$$

Один из наиболее известных примеров регулярной обобщенной функции – функция Хевисайда:

$$(8.5) \quad (\theta, \varphi) = \int_0^{+\infty} dx \varphi(x) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx \theta(x)\varphi(x),$$

где

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Пример 2. Главное значение интеграла в смысле Коши. Определим

$$\left(\frac{1}{x}, \varphi\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{|x| > \varepsilon} dx \frac{\varphi(x)}{x}.$$

Этот интеграл конечен, поскольку

$$\left(\frac{1}{x}, \varphi\right) = \int_0^{\infty} dx \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}.$$

Более того,

$$\left| \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \int_{-x}^x dt |\varphi'(t)| \leq 2\|\varphi\|^{(1)}.$$

Так что

$$\left| \left(\frac{1}{x}, \varphi \right) \right| \leq 2 \int_0^1 dx \|\varphi\|^{(1)} + 2 \left| \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} (x\varphi(x)) \right| \leq 4\|\varphi\|^{(1)}.$$

Пример 3. Дельта-функция. Прежде всего необходимо помнить, что дельта-функция (Дирака) есть не функция, а функционал, заданный формулой

$$(8.6) \quad (\delta, \varphi) = \varphi(0),$$

где $\varphi(x) \in \mathcal{S}$. Это равенство обычно записывают в виде

$$(8.7) \quad \int dx \delta(x) \varphi(x) = \varphi(0),$$

но легко видеть, что функции $\delta(x)$ такой, что выполнено (8.7) не существует. Поэтому (8.7) есть просто формальная запись (8.6). Линейность и непрерывность этого функционала легко следуют из (8.6).

Литература к лекции 8:

М.Рид, Б.Саймон “Методы современной математической физики”, том 1, “Функциональный анализ”;

В.С.Владимиров “Обобщенные функции в математической физике”;

И.М.Гельфанд, Г.Е.Шиллов “Обобщенные функции и действия над ними”, гл. I;

В.С.Владимиров, В.В.Жаринов “Уравнения математической физики”.