Задачи.

1. Бесконечная циклическая группа изоморфна группе $\mathbb{Z}(+)$.

2. Конечная циклическая группа порядка n изоморфна $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

3. Любая подруппа циклической группы циклична.

4. В конечной циклической группе порядка n существует единственная подруппа порядка d тогда и только тогда, когда $d|n$.

5. Сколько решений в конечной циклической группе порядка n имеет уравнение $g^k = 1$?

6. D_{2n} порождается двумя осевыми симметриями.

7. $SL(2,\mathbb{Z}) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

8. $GL^*(3,\mathbb{Z}) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

9. Любая перестановка представима в виде композиции транспозиций.

10. $S_n = \langle (1,2), (1,3), \ldots, (1,n) \rangle$.

11. $S_n = \langle (1,2), (1,2,\ldots,n) \rangle$.

12. S_3 изоморфна D_6.

13. S_4 изоморфна группе вращений куба.

14. **Теорема.** $|O_x| = \dfrac{|G|}{|G_x|}$.

15. Опишите все вращения куба с точностью до сопряжения.

16. Докажите, что $|X^g| = \left|X^{g'}\right|$, где g и g' — сопряженные элементы.

17. Докажите, что существует ровно 57 различных (отличающихся при всевозможных вращениях) раскрасок куба в три цвета.

Определение 1. Многогранник называется *правильным*, если группа его симметрий транзитивна на флагах (далее, флаг — О-Г-Р-В).

Определение 2. Многогранник называется *правильным*, если все его грани — равные правильные многоугольники, и в каждой его вершине сходится одно и то же число ребер.

18. Докажите, что два определения правильного многогранника эквивалентны для трехмерного пространства.

19. Докажите, что в правильном многограннике с центром в точке О, таком, что в каждой его вершине сходятся k граней, каждая из которых — правильный l — угольник, выполнены соотношения:

$$\widehat{OP} = \frac{\pi}{2}, \widehat{O\Gamma} = \frac{\pi}{l}, \widehat{OB} = \frac{\pi}{k},$$

где $\widehat{OP}$, $\widehat{O\Gamma}$, $\widehat{OB}$ — двугранные углы между плоскостями трехгранного угла $(O\Gamma, OB, OP)$, пересекающиеся по соответствующему ребру.

20. Найдите определяющие соотношения в $\mathbb{Z} = \langle 2, 3, -2, -3 \rangle$.

21. Пусть $G = \left\langle S \vee S^{-1} \right\rangle$. Расстояние $d(g_1, g_2)$ — минимальное число букв в записи слова $g_1^{-1} g_2$. Покажите, что это расстояние задает метрику.

22. Докажите, что кратчайшее (по ребрам целочисленной решетки) расстояние до точки с целыми координатами (m, n) от начала координат равно $|m| + |n|$.

23. Если $R(q)$ — количество целочисленных точек внутри круга радиуса q, то

$$\pi(q - \sqrt{2})^2 \leqslant R(q) \leqslant \pi(q + \sqrt{2})^2$$

.

24. Можно ли нарисовать на плоскости граф Кэли свободной группы с двумя образующими без самопересечений?

25. Докажите, что для действии на сфере свободной группы $\langle A, B, a, b \rangle$ верно

$$S^3 = E(T) \sqcup \widehat{A(T)} \sqcup \widehat{B(T)} \sqcup \widehat{a(T)} \sqcup \widehat{b(T)}.$$

26. Пусть $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$ — *группа Гейзенберга.* Докажите, что

$$G = \left\langle s = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Кроме того, $su = us$, $tu = ut$, $u = sts^{-1}t^{-1}$ — определяющие соотношения в этой группе.

Определение. Функция роста — количество слов (зависящее от n), разумная запись которых состоит не более, чем из n символов.

27. Найдите функцию роста в группе Гейзенберга.

28. Нарисуйте граф Кэли в группе S_3

(a) с образующими $\langle (1, 2), (2, 3) \rangle$;

(b) с образующими $\langle (1, 2), (2, 3), (3, 1) \rangle$.

29. * Докажите, что не существует группы, графом Кэли к которой будет *граф Петерсона.*

Обозначения.

$\mathbb{Z}(+)$ — группа целых чисел по сложению.

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ — группа вычетов по модулю n по сложению.

$SL(2, \mathbb{Z})$ — группа матриц 2×2 с единичным определителем.

$GL^*(3, \mathbb{Z})$ — группа матриц 3×3 с определителем равным ± 1.

S_n — группа перестановок $n-$элементного множества.

D_{2n} — группа движений правильного $n-$угольника (группа Диэдра).

O_x — орбита элемента x.

G_x — стабилизатор элемента x.

X^g — множество таких элементов $x \in X$, для которых $gx = x$.

T — трансверсаль(множество, соддержащее ровно одну точку из каждой орбиты).

$\widehat{A}$ — множество элементов свободной группы $< A, a, B, b >$, разумная запись которых начинается с A.