

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
"Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"**

Факультет экономических наук
Департамент математики

**Рабочая программа дисциплины
по выбору общеуниверситетского пула (МАГОЛЕГО)
«Временные ряды»**

для уровня подготовки – магистратура

Разработчик программы:

Доцент департамента математики на ФЭН к. ф.-м. н. Горяинова Е.Р.

Москва, 2018

*Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями
университета и другими вузами без разрешения кафедры-разработчика программы.*

1. Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает требования к образовательным результатам и результатам обучения студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для студентов магистерских программ, выбравших данную дисциплину из общеуниверситетского пула.

Программа разработана в соответствии с:
Образовательными стандартами НИУ ВШЭ.

2. Цели освоения дисциплины

Целями дисциплины «Временные ряды» являются:

- сформировать теоретические знания в области стохастического анализа;
- обучить студентов ориентироваться в основных моделях и классах временных рядов;
- обучить студентов применять основные методы анализа временных рядов для обработки реальных социально-экономических данных.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен

Знать:

- основные модели стационарных временных рядов;
- основные методы оценивания параметров базовых моделей стационарных временных рядов;
- основные методы идентификации временных рядов;
- основные методы прогнозирования временных рядов;

Уметь:

- строить математические модели, адекватно описывающие социально-экономические данные, представляемые реализациями временных рядов;
- использовать статистические критерии для проверки гипотез относительно наблюдаемых случайных данных;

Владеть:

- навыками решения типовых задач статистического анализа временного ряда;
- основными определениями, методами и алгоритмами анализа данных, содержащих случайную составляющую.

В результате освоения дисциплины студент осваивает следующие компетенции:

Компетенция	Код по ФГОС / НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
Способен рефлексировать (оценивать и перерабатывать) освоенные научные методы	СК-М1	Распознаёт, воспроизводит и использует основные научные понятия, методы и приёмы решения задач статистической обработки данных и применяет их в практической деятельности.	Лекции, семинары, выполнение домашних заданий, групповая работа на семинарах
Способен предлагать концепции, модели, изобретать и апробировать способы и инструменты профессиональной деятельности	СК-М2	Использует доступную информацию для построения математической модели проблемной ситуации, формулирует концепции и методы решения поставленной задачи из своей профессиональной области.	Лекции, семинары, выполнение домашних заданий, групповая работа на семинарах
Способен принимать управленческие решения, оценивать их возможные последствия и нести за них ответственность	СК-М5	Предлагает и обосновывает методы решения поставленных задач в области социальных, экономических и политических процессов, и оценивает их достоинства и недостатки.	Лекции, семинары, выполнение домашних заданий, групповая работа на семинарах
Способен разрешать мировоззренческие, социально и лично значимые проблемы	СЛК-М6	Способен строить и анализировать математические модели реальных задач в соответствии с направлением подготовки и специализацией.	Лекции, семинары, выполнение домашних заданий, групповая работа на семинарах

4. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Для изучения курса «Временные ряды» требуются знания базового курса «Теория вероятностей и математическая статистика».

5. Тематический план учебной дисциплины

№	Название раздела	Всего часов	Аудиторные часы			Самостоятельная работа
			Лекции	Семинары	Практические занятия	
1.	Основные понятия теории случайных процессов и временных рядов	17	3	4		10
2.	Основные модели стационарных временных рядов	21	3	4		14
3.	Прогнозирование	14	2	2		10
4.	Идентификация, оценивание и тестирование стационарных временных рядов	30	6	6		18
5.	Идентификация нестационарных временных рядов	22	4	4		14
6.	Цепи Маркова	10	2	2		6
	Итого	114	20	22		72

6. Формы контроля знаний студентов

Тип контроля	Форма контроля	1 год				Параметры **
		1	2	3	4	
Текущий	Контрольная работа			9		Письменная работа на 80 минут
Текущий	Участие в статистической			*		Студент должен дать мотивированное заключение о модели линейного стационарного временного ряда на основании

	игре				смоделированной преподавателем реализации ряда, выборочной АКФ и ЧАКФ
Итоговый	Экзамен			э	На экзамен выносятся защита домашнего задания предварительно проверенного преподавателем. Домашнее задание заключается в идентификации реального (или смоделированного преподавателем) временного ряда. Методика идентификации должна быть описана грамотным математическим языком, компьютерные расчеты каждого этапа идентификации должны быть представлены письменно.

6.1. Критерии оценки знаний, навыков

Для прохождения контроля студент должен, как минимум, продемонстрировать знания основных определений и формулировок; умение решать типовые задачи, разобранные на семинарских занятиях и владеть основными методами идентификации временных рядов.

Оценки по всем формам текущего контроля выставляются по 10-ти балльной шкале.

6.2. Порядок формирования оценок по дисциплине

Все оценки выставляются по 10-ти балльной шкале.

Результирующая оценка за дисциплину рассчитывается следующим образом:

$$O_{результ} = 0.5 * O_{накопл} + 0.5 * O_{экс.},$$

где $O_{накопл} = 0.8 * O_{КР} + 0.2 * O_{результат статистической игры}$.

Способ округления результирующей оценки – арифметический.

Если оценка составляет менее 4-х баллов, то округлённая результирующая оценка равна целой части набранной студентом оценки.

7. Содержание дисциплин

Раздел 1. Основные понятия теории случайных процессов и временных рядов (Л.-Зч., С.-4ч., СРС-10ч.)

Определение случайного процесса (СП) и временного ряда (ВР). Определение реализации СП и конечномерных распределений СП. Теорема Колмогорова о согласованности конечномерных распределений (без док-ва). Основные вероятностные характеристики случайных процессов. Основные свойства ковариационной и корреляционной функции СП. Примеры временных рядов.

Литература по разделу.

1. Канторович Г.Г. Анализ временных рядов. Экономический журнал ВШЭ. 2002. №1. с 85-113
2. Миллер Б.М., Панков А.Р. Теория случайных процессов в примерах и задачах.- М.: Физматлит, 2007. 320с.

Раздел 2. Основные модели стационарных временных рядов (Л.-3ч., С.-4ч., СРС-14ч.)

Стационарность в широком (слабом) и узком (сильном) смысле. Основные модели стационарных ВР (белый шум, процесс авторегрессии $AR(p)$, процесс скользящего среднего $MA(q)$, комбинированный процесс авторегрессии-скользящего среднего $ARMA(p,q)$). Оператор сдвига. Линейные процессы. Условие обратимости процесса $MA(q)$ и стационарности процессов $AR(p)$ и $ARMA(p,q)$. Частная автоковариационная функция (ЧАКФ). Нелинейные модели стационарных ВР: авторегрессионная модель условной гетероскедастичности (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity ($ARCH(p)$)) и обобщённая авторегрессионная модель условной гетероскедастичности (Generalised Autoregressive Conditional Heteroskedasticity ($GARCH(p;q)$)). Понятие условной волатильности. Основные свойства $ARCH(1)$ и $GARCH(1;1)$ процессов.

Литература по разделу.

1. Brockwell, P.J., and R.A. Davis, 2003, Introduction to Time Series and Forecasting, Springer Publ., 2nd ed.
2. Kirchgässner G., Wolters J. Introduction to modern time series analysis. Springer, Berlin, 2007.
3. Enders, W., 2003, Applied Econometric Time Series, Wiley Publ., 2nd ed.
4. Канторович Г.Г. Анализ временных рядов. Экономический журнал ВШЭ. 2002. №1. с 85-113
5. Миллер Б.М., Панков А.Р. Теория случайных процессов в примерах и задачах.- М.: Физматлит, 2007. 320с.
6. Ширяев А.Н. Основы финансовой стохастической математики. Том 1. Факты. Модели. М.: Фазис, 1998. 512с.

Раздел 3. Прогнозирование (Л.-2ч., С.-2ч., СРС-10ч.)

Задача прогноза. Оптимальный в среднеквадратическом смысле предиктор.

Среднеквадратическая ошибка предиктора. Теорема о виде наилучшего (в среднеквадратическом смысле) предиктора. Прогнозирование стационарных временных рядов. Построение с.к.- оптимальных оценок прогноза на m шагов в $AR(p)$, $MA(1)$, $ARCH(1)$ и $GARCH(1,1)$ моделях. Гауссовские СП. Теорема о нормальной корреляции (без док-ва). Прогнозирование гауссовского ВР.

Литература по разделу.

1. Brockwell, P.J., and R.A. Davis, 2003, Introduction to Time Series and Forecasting, Springer Publ., 2nd ed.
2. Kirchgässner G., Wolters J. Introduction to modern time series analysis. Springer, Berlin, 2007.
3. Enders, W., 2003, Applied Econometric Time Series, Wiley Publ., 2nd ed.
4. Канторович Г.Г. Анализ временных рядов. Экономический журнал ВШЭ. 2002. №1. с 85-113
5. Канторович Г.Г. Анализ временных рядов. Экономический журнал ВШЭ. 2002. №2. с. 251-273
6. Ширяев А.Н. Основы финансовой стохастической математики. Том 1. Факты. Модели. М.: Фазис, 1998. 512с.

Раздел 4. Идентификация, оценивание и тестирование стационарных ВР (Л.-6ч., С.-6ч., СРС-18ч.)

Свойства выборочного среднего стационарного процесса. Выборочная автокорреляционная (АКФ) и выборочная частная автокорреляционная функция (ЧАКФ). Статистические свойства выборочных АКФ и ЧАКФ. Выбор модели линейного стационарного ВР. Метод Юла-Уокера для оценивания параметров модели AR(p). Процедура backcasting для оценивания параметров обратимой модели MA(q). Алгоритмы Дурбина и Хэннана-Рисанена для оценивания параметров модели ARMA(p,q). Асимптотические распределения оценок, полученных методами Юла-Уокера, backcasting и Хэннана-Рисанена. Проверка адекватности подобранной модели: проверка беложумности остатков с помощью критериев Бокса-Пирса и Льюнга-Бокса; контроль качества модели с помощью информационных критериев Акаике (AIC) и Шварца (BIC). Проверка гипотезы о гауссовости остатков с помощью критерия Хархе-Бера.

Литература по разделу.

1. Brockwell, P.J., and R.A. Davis, 2003, Introduction to Time Series and Forecasting, Springer Publ., 2nd ed.
2. Kirchgässner G., Wolters J. Introduction to modern time series analysis. Springer, Berlin, 2007.
3. Enders, W., 2003, Applied Econometric Time Series, Wiley Publ., 2nd ed.
4. Канторович Г.Г. Анализ временных рядов. Экономический журнал ВШЭ. 2002. №1. с 85-113
5. Канторович Г.Г. Анализ временных рядов. Экономический журнал ВШЭ. 2002. №2. с. 251-273
6. Ширяев А.Н. Основы финансовой стохастической математики. Том 1. Факты. Модели. М.: Фазис, 1998. 512с.
7. Горяинова Е.Р., Панков А.Р., Платонов Е.Н. Прикладные методы анализа статистических данных. М.: Изд. Дом ВШЭ, 2012.- 312 с.

Раздел 5. Идентификация нестационарных временных рядов (Л.-4ч., С.-4ч., СРС-14ч.)

Детерминированная и случайная составляющие ВР. Оценивание и удаление детерминированных компонент ряда, зависящих от времени: тренда, сезонной и циклической составляющих. Пример построения математической модели реального ВР, представляющего ежемесячное количество регистрируемых браков в РФ. Подход Бокса-Дженкинса. Оператор дифференцирования. Модели ARIMA. Нестационарные процессы типа TSP (Trend-stationarity process) и DSP (Difference-stationarity process). «Ложные» (Spurious) тренды. Проблема единичного корня. Критерии Дики-Фуллера. Расширенные критерии Дики-Фуллера. Процедура Доладо-Дженкинса-Сосвилла-Риверо идентификации нестационарного ряда.

Литература по разделу

1. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А. Анализ данных на компьютере. – М.: Инфра, 2003.
2. Box, G.E.P., G.M. Jenkins, and G.C. Reinsel, 2008, Time Series Analysis: Forecasting and Control (Wiley Series in Probability and Statistics), Wiley Publ., 4th ed. – 784 pages. ISBN: 978-0-470-27284-8.
3. Lütkepohl, H., & Krätzig, M., 2004, Applied time series econometrics. Cambridge University Press.
4. Горяинова Е.Р., Панков А.Р., Платонов Е.Н. Прикладные методы анализа статистических данных. М.: Изд. Дом ВШЭ, 2012.- 312 с.
5. Канторович Г.Г. Анализ временных рядов. Экономический журнал ВШЭ. 2002. №1. с 85-113
6. Канторович Г.Г. Анализ временных рядов. Экономический журнал ВШЭ. 2002. №2. с. 251-273
7. Ширяев А.Н. Основы финансовой стохастической математики. Том 1. Факты. Модели. М.: Фазис, 1998. 512с.

Раздел 5. Цепи Маркова (Л.-2ч., С.-2ч., СРС-14ч.)

Цепи Маркова. Вероятностные характеристики цепей Маркова. Классификация состояний цепи Маркова. Эргодические цепи Маркова. Эргодическая теорема. Предельные вероятности состояний цепи Маркова. Задача о разорении игрока.

Литература по разделу

1. Миллер Б.М., Панков А.Р. Теория случайных процессов в примерах и задачах.- М.: Физматлит, 2007. 320с.
2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и её инженерные приложения. – М.: Наука, 1991

8. Образовательные технологии

В рамках данного курса планируется участие студентов в статистической игре по «угадыванию» математической модели временного ряда на основании представленной преподавателем реализации ряда и выборочных автокорреляционной и частной автокорреляционной функций. Для организации данной игры требуется проектор с подключённым ноутбуком.

Занятия по курсу проходят в форме лекций и семинаров, с элементами живого обсуждения, что требует хорошей самостоятельной подготовки студентов, которая будет мотивирована выполнением многоэтапной домашней задачи. Студенты должны быть строго ориентированы на самостоятельное овладение вопросами дисциплины и самостоятельное выполнение заданий, предусмотренных данным курсом. Самостоятельная работа студентов является важнейшей частью их занятий по данному курсу.

9. Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

9.1. Тематика заданий текущего контроля

Примерный вариант контрольной работы

1. Временной ряд $\xi_n, n \in Z$, описывается стационарным уравнением авторегрессии второго порядка с известными параметрами. Имеются наблюдения $\xi_{21}, \xi_{22}, \xi_{23}$. Постройте с.к.-оптимальный прогноз для значения ξ_{24} .

2. В городе N каждый житель имеет одну из трёх профессий-А,В,С. Дети отцов, имеющих профессии А,В,С сохраняют профессии отцов с вероятностями $3/5, 2/3, 1/4$ соответственно. А если не сохраняют, то с равными вероятностями выбирают любую из двух других профессий. Найти: 1) распределение по профессиям в следующем поколении, если в данном поколении профессию А имело 20% жителей, профессию В -30%, профессию С-50%; 2) предельное распределение по профессиям, когда число поколений растёт; 3) распределение по профессиям, не меняющееся при смене поколений.

3. По 225 наблюдениям стационарного временного ряда построены выборочная автокорреляционная функция ACF (k) и выборочная частная автокорреляционная функция PACF (k). Значения ACF (k) и PACF (k) для $k=1, \dots, 12$ приведены в таблице.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ACF	-0,757	0,502	-0,31	0,222	-0,183	0,156	-0,135	0,124	-0,117	0,014	-0,110	0,096
PACF	-0,757	-0,166	0,019	0,089	-0,027	0,005	0,071	-0,006	0,013	0,004	-0,007	0,004

Проведите идентификацию данного временного ряда. Опишите дальнейшие шаги построения математической модели этого ряда.

4. Имеется 100 наблюдений временного ряда X_t . По МНК были вычислены оценки и среднеквадратические отклонения оценок параметров следующей модели $X_t = \mu + \beta t + \alpha X_{t-1} + \theta \Delta X_{t-1} + \epsilon_t$. Результаты оценивания приведены в таблице

μ	β	α	θ
53,02 (13,18)	1,2 (0,24)	0,751 (0,061)	0,41(0,1)

Запаздывания более высокого порядка не включены в рассматриваемую модель, т.к. коэффициенты при запаздываниях более высокого порядка признаны незначимыми. Выясните, является ли этот ряд случайным блужданием.

5. Имеется 500 наблюдений временного ряда X_t . По МНК были вычислены оценки и среднеквадратические отклонения оценок параметров для следующих моделей: $X_t = \mu + \beta t + \alpha X_{t-1} + \epsilon_t$; $\Delta X_t = \mu + \beta t + \epsilon_t$; $X_t = \mu + \alpha X_{t-1} + \epsilon_t$, $\Delta X_t = \mu + \epsilon_t$ and $X_t = \alpha X_{t-1} + \epsilon_t$. Согласно статистическим критериям остатки каждой модели на уровне значимости 0.05 признаны гомоскедастичными, некоррелированными и гауссовскими. Результаты оценивания приведены в таблице

Модель	μ	β	α
1	0,124(0,05)	0,00025(0,00011)	0,97(0,013)
2	0,029(0,013)	0,0007(0,0006)	
3	0,09(0,05)		0,94(0,026)
4	0,08(0,06)		
5			0,95 (0,019)

Можно ли считать, что временной ряд X_t является нестационарным процессом типа DSP? Ответ обосновать.

9.2. Вопросы для оценки качества освоения дисциплины

Тема 1.

1. Дайте определение случайного процесса (СП) и временного ряда (ВР).
2. Дайте определение реализации ВР?
3. Что такое конечномерное распределение СП?
4. Каковы основные вероятностные характеристики СП?
5. Каковы основные свойства ковариационной функции СП?
6. Что называется n -мерной плотностью распределения случайного процесса?
7. Дайте определение белого шума.

Тема 2.

1. Дайте определение стационарного (в широком и узком смысле) ВР.
2. Приведите примеры стационарных ВР.
3. Дайте определение случайной последовательности вида скользящего среднего. Является ли она стационарной в широком смысле?
4. Определите процесс авторегрессии. Укажите условия стационарности этого ВР.
5. Поясните причины возникновения нелинейных моделей временных рядов
6. Какие нелинейные модели временных рядов вам известны?
7. Чему равна автоковариационная функция процесса авторегрессии первого порядка?

8. Чему равна автоковариационная функция процесса скользящего среднего порядка в точке 5?
9. Дайте определение частной автоковариационной функции.
10. Чему равна частная автоковариационная функция процесса авторегрессии порядка 3 в точке 4?

Тема 3.

1. Что такое с.к. оптимальный предиктор?
2. Определите среднеквадратическую ошибку предиктора.
3. Сформулируйте теорему о нормальной корреляции.
4. Сформулируйте теорему о наилучшем в с.к. смысле предикторе.

Тема 4.

1. Как оценить автоковариационную функцию и частную автоковариационную функцию наблюдаемого стационарного ВР?
2. Что такое коррелограмма?
3. Как проверить гипотезу белозумности наблюдаемого временного ряда?
4. Какие методы оценивания и исключения тренда и сезонной компоненты вам известны? Покажите на примерах.
5. Опишите методы оценивания параметров уравнения авторегрессии.
6. Опишите процедуру определения порядка модели процесса авторегрессии.
7. Опишите критерии проверки адекватности ARMA модели.
8. Укажите основные свойства выборочной автоковариационной функции процесса скользящего среднего.
9. Укажите основные свойства выборочной частной автоковариационной функции процесса авторегрессии.

Тема 5.

1. Какие методы оценивания и исключения тренда и сезонной компоненты вам известны? Покажите на примерах.
2. Какие методы оценивания и исключения тренда и сезонной компоненты вам известны? Покажите на примерах.
3. Для выявления какой проблемы предназначены критерии Дики-Фуллера?
4. Каковы основные различия нестационарных рядов типа TSP и DSP?
5. Опишите процедуру Доладо. Для чего предназначена эта процедура?
6. Опишите подход Бокса-Дженкинса
7. Определите модель ARIMA

Тема 6.

1. Что такое цепь Маркова?
2. Какая цепь называется однородной?
3. Какие состояния называются существенными, сообщающимися, апериодическими?
4. Сформулируйте эргодическую теорему.

5. Как найти стационарное распределение однородной цепи Маркова, если оно существует?

Примеры заданий итогового контроля

9.3. Экзаменационная работа

Защита домашней работы.

Проведение идентификации реального (или смоделированного преподавателем) нестационарного временного ряда.

Методика идентификации должна быть аккуратно описана грамотным математическим языком, компьютерные расчеты каждого этапа идентификации должны быть представлены письменно.