

# Некоторые результаты о труднорешаемости задач о независимом множестве и о 3-раскраске

Сироткин Дмитрий Валерьевич

Высшая школа экономики — Нижний Новгород, e-mail: dsirotkin@hse.ru

Задача о независимом множестве для заданного графа состоит в вычислении числа независимости графа — размера наибольшего множества его попарно несмежных вершин. Задача о вершинной 3-раскраске состоит для заданного графа в том, чтобы проверить, можно ли множество его вершин разбить на три подмножества попарно несмежных вершин. Обе эти задачи являются классическими NP-полными задачами на графах.

Классическим вопросом, возникающим при исследовании NP-полных задач на графах, является исследование вычислительной сложности (доказательства NP-полноты и построения полиномиальных алгоритмов) задач в различных классах графов. Одним из инструментов, используемых при изучении данного вопроса, являются преобразования графов. Примером такого преобразования может служить операция смежностного поглощения. А именно, если замкнутая окрестность вершины  $b$  включает замкнутую окрестность вершины  $a$ , то удаление  $a$  из графа сохраняет число независимости [1]. Подобные замены входят в некоторый класс локальных преобразований графов, которые были введены в работе [2]. Последовательное применение подобных преобразований позволяет определить сложностный статус задач о независимом множестве и вершинной 3-раскраске для определённых классов графов.

Хорошо известно, что задача о независимом множестве является NP-полной в классе кубических планарных графов [3]. В работе [4] было показано, что задача о независимом множестве является NP-полной в классе  $n$ -вершинных планарных триангуляций со степенями всех вершин  $O(\log n)$ . Уточнение этого результата будет представлено в докладе. А именно, верна следующая теорема:

**Теорема 1.** *Задача о независимом множестве NP-полной в классе планарных триангуляций со степенями всех вершин не более чем 18.*

Доказательство данного результата ведётся с использованием новых замен, являющихся частными случаями преобразований, описанных в работе [3]. А именно, сначала путём последовательных разбиений граней произвольного планарного кубического графа, задача сводится к классу планарных графов с гранями, ограниченными не более, чем 6 рёбрами. Далее, каждая из таких граней разбивается на треугольники. При этом, показывается,

что подобное разбиение меняет число независимости на известную константу и ограничивает степень каждой вершины числом 18.

Похожий подход применяется для задачи о вершинной 3-раскраске. Известно, что задача о 3-раскраске NP-полна в классе планарных графов с максимальной степенью вершин 4 [5]. Известно также, что она является полиномиально разрешимой в классе планарных триангуляций и в классе графов со степенями всех вершин не более чем 3 [6]. Было бы интересным найти порог на значения длин граней планарных графов, при котором возникает NP-полнота, и при этом иметь графы с небольшими степенями вершин. В докладе будет представлен следующий результат:

**Теорема 2.** *Задача о вершинной 3-раскраске в классе плоских графов с максимальной степенью вершин не более чем 5, чьи грани - только треугольники и четырехугольники является NP-полной.*

Доказательство данного результата ведётся с использованием специальных локальных преобразований, разработанных для задач о 3-раскраске. А именно, сначала каждая вершина произвольного планарного графа «шунтируется» — заменяется на некоторый граф специального вида. Данная операция формирует внутреннюю структуру графа, а именно, обеспечивает достаточно малые степени его вершин. Возможность провести дополнительные рёбра ввиду малой степени вершин графа позволяет провести разбиение граней графа на грани, ограниченные не более, чем четырьмя рёбрами.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Алексеев В. Е. О сжимаемых графах // Проблемы кибернетики. 1979. Т. 36, С. 23–31.
- [2] Алексеев В. Е., Лозин В. В. О локальных преобразованиях графов, сохраняющих число независимости // Дискретный анализ и исследование операций. 1998. Т. 5, № 1. С. 3–19.
- [3] Garey M. R., Johnson D. S., Stockmeyer L. Some simplified NP-complete graph problems // Theoretical Computer Science. 1976. Т. 1, № 3. С. 237–267.
- [4] Кобылкин К. С. Вычислительная сложность задачи вершинного покрытия в классе планарных триангуляций // Труды института математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 3. С. 153–159.
- [5] Dailey D. Uniqueness of colorability and colorability of planar 4-regular graphs are NP-complete // Discrete Mathematics. 1980. Т. 30, № 3. С. 289–293.
- [6] 3-Colorability of pseudo-triangulations / O. Aichholzer, F. Aurenhammer, T. Hackl, C. Huemer, A. Pilz, B. Vogtenhuber // International Journal of Computational Geometry and Applications. 2015 Т. 25, № 4. С. 283–298.