

Программа учебной дисциплины «Компьютерная топология»

Утверждена

Академическим советом ООП

Протокол № 2 от «27» июня 2018 г.

Автор	Яковлев Е.И., доктор физ.-мат. наук, eyakovlev@hse.ru
Число кредитов	6
Контактная работа (час.)	100
Самостоятельная работа (час.)	128
Курс	4
Формат изучения дисциплины	без использования онлайн курса

I. ЦЕЛЬ, РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И ПРЕРЕКВИЗИТЫ

Целями освоения дисциплины «Компьютерная топология» являются знакомство с базовыми понятиями и конструкциями комбинаторной топологии; изучение методов и алгоритмов вычисления топологических характеристик и элементов полиэдров, используемых на практике в качестве компьютерных моделей реальных объектов.

В результате освоения дисциплины студент должен:

знать:

определения и свойства математических объектов в этой области, формулировки утверждений, методы их доказательства, основные алгоритмы компьютерной топологии, их обоснования, возможные сферы приложений.

уметь:

решать задачи вычислительного и теоретического характера в области компьютерной топологии.

владеть:

навыками анализа, разработки и совершенствования алгоритмов компьютерной топологии.

Для освоения учебной дисциплины студенты должны владеть следующими знаниями и компетенциями:

знать основы алгебры, геометрии и топологии в рамках 1 – 3 курсов ОП «Математика».

II. СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Тема 1. Базовые конструкции комбинаторной топологии

Симплициальные комплексы и схемы. Полиэдры. Клеточные разбиения. Связность и сильная связность, алгоритмы вычисления компонент связности и сильной связности. Однородность. Бариецентрические подразделения.

Тема 2. Группы симплициальных и клеточных гомологий по модулю 2

Определение и простейшие свойства групп гомологий. Топологический смысл нульмерных гомологий. Группы относительных гомологий, гомологическая

последовательность пары. Последовательности Майера-Виеториса. Клеточные гомологии. Группы когомологий.

Тема 3. Триангулированные многообразия

Комбинаторные критерии многообразий. Алгоритмы поиска особых вершин и ребер двумерных и трехмерных полиэдров. Псевдомногообразия. Ориентируемость и ориентации многообразий. Алгоритм для проверки на ориентируемость и задания ориентации двумерного триангулированного многообразия.

Тема 4. Вычисление базисов групп гомологий

Матричные алгоритмы. Поиск фундаментальных циклов графа. Вычисление базисов групп гомологий двумерных псевдомногообразий без применения матриц. Теорема Александера-Понтрягина и алгоритм построения двумерных базисных циклов разветвленной поверхности. Алгоритмы вычисления базиса группы одномерных гомологий разветвленной поверхности. Группы гомологий трехмерного тела. Вычисление базисов групп относительных гомологий.

Тема 5. Индексы пересечения

Барицентрические звезды и группы гомологий. Индексы пересечения и их свойства. Группы когомологий и изоморфизмы Пуанкаре и Лефшеца. Алгоритмы для вычисления индексов пересечения на двумерных и трехмерных компактных многообразиях. Некоторые методы вычисления базисов групп когомологий.

Тема 6. Минимальные пути и циклы

Индексная вектор-функция и ее свойства. Алгоритм построения индексной вектор-функции. Накрывающие полиэдры. Алгоритм построения пути с минимальным весом, соединяющего заданные вершины и гомологичного заданному пути. Минимизация путей с подвижным концом. Поиск минимальных циклов в заданных классах одномерных гомологий.

Тема 7. Применения топологических алгоритмов

Выделение ручек двумерных многообразий. Обнаружение и устранение топологических дефектов компьютерных моделей. Применение топологии в некоторой численной схеме решения трехмерных задач механики сплошной среды.

III. ОЦЕНИВАНИЕ

Критерий оценки знаний и навыков

Студент должен продемонстрировать хорошее знание теоретических основ и основных результатов вычислительной топологии, областей их применения, умение анализировать топологические алгоритмы и разрабатывать новые алгоритмы для решения типовых задач. Оценки по всем формам текущего контроля выставляются по 10-ти балльной шкале. При проведении контроля осуществляется выдача индивидуальных заданий.

Результатом проверки является оценка, выставляемая в соответствии со следующими критериями:

- Высшая оценка 10 баллов выставляется при отличном выполнении задания, то есть при наличии полных (с детальными пояснениями и культурой выкладок), оригинальных и правильных решений задач, верных ответов и высококачественного оформления работы.

- Оценка 7-8-9 баллов выставляется при наличии решений задач и правильных ответов, но при отсутствии какого-либо из вышеперечисленных отличительных признаков, например, детальных выкладок или пояснений, качественного оформления, представления алгоритма или последовательности решения задач.
- Оценка в 6 баллов выставляется при наличии отдельных неточностей в ответах (включая грамматические ошибки) или неточностях в решении задач не принципиального характера (описки и случайные ошибки арифметического характера).
- Оценка в 5 баллов выставляется в случаях, когда в ответах и в решениях задач имеются неточности и ошибки, свидетельствующие о недостаточном понимании вопросов и требующие дополнительного обращения к тематическим материалам.
- Оценка в 4 балла выставляется при наличии серьезных ошибок и пробелов в знаниях по контролируемой тематике.
- Оценка в 3 балла выставляется при наличии лишь отдельных положительных моментов в представленной работе.
- Оценка в 2 балла выставляется при полном отсутствии положительных моментов в представленной работе.
- Оценка в 1 или 0 баллов выставляется в случаях, когда небрежные записи, неправильные ответы и решения, кроме того, сопровождаются какими-либо демонстративными проявлениями безграмотности или неэтичного отношения к изучаемой теме и предмету в целом.

Порядок формирования оценок по дисциплине

Преподаватель оценивает работу студентов на семинарских занятиях: оценивается правильность решения задач на семинаре. Оценки за работу на семинарских занятиях преподаватель выставляет в рабочую ведомость. Результирующая оценка по 10-ти балльной шкале за работу на семинарских занятиях также заносится в рабочую ведомость.

Накопленная оценка за текущий контроль учитывает результаты студента по текущему контролю следующим образом:

$$O_{\text{накопительная1}} = 0,5 O_{\text{текущая}} + 0,5 O_{\text{сам. работа}}$$

Результирующая оценка за итоговый контроль в форме экзамена выставляется по следующей формуле:

$$O_{\text{итоговая}} = 0,5 O_{\text{экзамен}} + 0,5 O_{\text{накопительная2}}$$

Способ округления оценок - арифметический.

Дисциплина изучается год. В диплом ставится оценка за итоговый контроль на экзамене.

IV. ПРИМЕРЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Оценочные средства для текущего контроля студента

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА - БИЛЕТ №1

1.1. Пусть P - крендель (сфера с двумя ручками), $Q \subset P$ - меридиан одной ручки. Вычислить группы $H_n(P, Q)$.

1.2. Однополостный гиперболоид M делит пространство \mathbb{R}^3 на две области U и V . Классифицировать топологические пространства M , U и V с точностью до

гомотопической и топологической эквивалентности.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА - БИЛЕТ №2

2.1. Пусть P - крендель (сфера с двумя ручками), $Q \subset P$ - сфера с 4 дырками, для которой разность $P \setminus Q$ состоит из двух компонент связности, гомеоморфных цилиндру. Вычислить группы $H_n(P, Q)$.

2.2. Пусть S^2 - сфера радиуса 2 с центром $O = (0, 0, 0)$, S_t - сфера радиуса 1 с центром $O_t = (0, t, 1)$, $P_t = S^2 \cup S_t^2$. Классифицировать семейство поверхностей $\{P_t/t \in \mathbb{R}\}$ с точностью до гомотопической и топологической эквивалентности.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА - БИЛЕТ №3

3.1. Пусть P - сфера с 4 дырками, $Q = \partial P$. Вычислить группы $H_n(P, Q)$.

3.2. Крендель M делит пространство \mathbb{R}^3 на две области. Пусть F и G - замыкания этих областей. Классифицировать топологические пространства M , F и G с точностью до гомотопической и топологической эквивалентности.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА - БИЛЕТ №4

4.1. Пусть P - тор с 3 дырками, $Q = \partial P$. Вычислить группы $H_n(P, Q)$.

4.2. Пусть M - объединение трех попарно перпендикулярных плоскостей, N - объединение трех плоскостей, проходящих через одну прямую L . Будут ли поверхности M и N гомотопически эквивалентны и гомеоморфны?

Оценочные средства для промежуточной аттестации

Примеры теоретических вопросов к экзамену по всему курсу

1. Симплициальные комплексы и схемы, полиэдры.
2. Связность и сильная связность, методы проверки.
3. Симплициальные гомологии по модулю 2.
4. Топологический смысл нульмерной группы гомологий.
5. Группы относительных гомологий, последовательность пары.
6. Абсолютная последовательность Майера-Вьеториса.
7. Комбинаторные критерии двумерных и трехмерных многообразий.
8. Барицентрический звездный комплекс и группы гомологий.
9. Индексы и формы пересечения.
10. Группы когомологий и изоморфизм Пуанкаре.
11. Методы задания ориентации.
12. Универсальный метод вычисления базисов групп гомологий.
13. Коллапсирование и его применения.
14. Вычисление базисов групп гомологий 2-псевдомногообразий.
15. Теорема Александра-Понтрягина.
16. Построение базисных циклов разветвленной поверхности.
17. Алгоритмы вычисления групп гомологий трехмерного тела.
18. Вычисление групп относительных гомологий.

19. Методы вычисления индексов пересечения.
20. Цели и методы построения индексной вектор-функции.
21. Построение базисов групп когомологий 2- и 3-многообразий.
22. Задачи на условную минимизацию путей и циклов.
23. Построение регулярного накрытия 2-многообразия.
24. Канонические базисы группы 1-гомологий 2-многообразий.
25. Выделение ручек двумерных многообразий.
25. Топологический шум и методы его устранения.
26. Применения топологии в «ажурной» численной схеме решения задач механики сплошной среды методом конечных элементов.

Образец экзаменационного билета

Вариант 00		
Теоретический вопрос		
1	Алгоритм вычисления базисов групп гомологий двумерных псевдомногообразий без применения матриц инцидентий.	3
Задача		
2	Пусть тетраэдры T_1 и T_2 имеют общее ребро. Записать нетривиальную часть последовательности Майера-Вьеториса для триады $(T_1 \cup T_2, T_1, T_2)$.	3

V. РЕСУРСЫ

5.1. Основная литература

1. Мищенко, А.С. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии: учебник / А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко. – 2-е изд., испр. - М.: ЛЕНАНД, 2016. – 307 с.
2. Мищенко, А.С. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии / А.С.Мищенко, Ю.П.Соловьев, А.Т.Фоменко; под общ. ред. акад. А.Т.Фоменко. - М.: ЛЕНАНД, 2016. - 409 с. - (Классический учебник МГУ). - ISBN 978-5-9710-2448-4.

5.2. Дополнительная литература

1. Мищенко, А.С. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии: учебник / А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 298 с. - (Классический университетский учебник). - ISBN 5-9221-0442-X.
2. Прасолов, В.В. Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии / В.В.Прасолов. - 2-е изд.; испр. и доп. - М.: Изд-во МЦНМО, 2014. - 358 с. - (Классические направления в математике). - ISBN 978-5-4439-0241-8.

5.3. Программное обеспечение

№ п/п	Наименование	Условия доступа
1.	Microsoft Windows 8.1 Professional RUS	<i>Из внутренней сети университета (договор)</i>
2.	Microsoft Office Professional Plus 2013	<i>Из внутренней сети университета (договор)</i>

5.4. Профессиональные базы данных, информационные справочные системы, интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)

№ п/п	Наименование	Условия доступа
	<i>Профессиональные базы данных, информационно-справочные системы</i>	
2.	Электронные образовательные ресурсы	<i>Договор на использование электронных баз данных/по подключению и обеспечению доступа к базам данных</i>
	<i>Интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)</i>	
1.	«Электронно-библиотечная система (ЭБС) Public.ru»	URL: https://www.public.ru/

5.5. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебные аудитории для лекционных занятий по дисциплине обеспечивают использование и демонстрацию тематических иллюстраций, соответствующих программе дисциплины в составе:

- ПЭВМ с доступом в Интернет (операционная система, офисные программы, антивирусные программы);
- мультимедийный проектор с дистанционным управлением.