

Программа учебной дисциплины «Дифференциальная геометрия»

Утверждена

Академическим советом ООП
Протокол №2 от «26» июня 2017 г.

Автор	Жукова Н.И., доктор физ.-мат. наук, nzhukova@hse.ru
Число кредитов	8
Контактная работа (час.)	132
Самостоятельная работа (час.)	172
Курс	3
Формат изучения дисциплины	без использования онлайн курса

I. ЦЕЛЬ, РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И ПРЕРЕКВИЗИТЫ

Ознакомление с основными понятиями современной дифференциальной геометрии и ее приложениями. Изучение основ геометрии, необходимых для освоения других математических дисциплин, и развитию практических навыков решения геометрических задач. Формирование у студентов представлений о дифференциальной геометрии, как одной из важнейших математических дисциплин, имеющей свой предмет, задачи и методы.

В результате освоения дисциплины студент должен:

знать:

основные определения и результаты (теоремы) дифференциальной геометрии;

уметь:

решать типовые теоретические и вычислительные задачи;

владеть:

применения методов дифференциальной геометрии в смежных теоретических и прикладных областях.

Настоящая дисциплина является дисциплиной по выбору.

Для усвоения учебной дисциплины студенты должны владеть следующими знаниями и компетенциями: знать основы математического анализа, алгебры, геометрии и топологии в рамках 1 и 2 курса ОП «Математика».

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин: «Геометрия многообразий», «Динамические системы».

II. СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Раздел 1. Анализ вектор-функций

Вектор-функции одного переменного. Годограф вектор-функции. Предел вектор-функции. Координатные функции. Свойства пределов вектор-функции. Непрерывность и дифференцируемость вектор-функции. Правила дифференцирования вектор-функции. Формула Тейлора для вектор-функции. Интегрирование вектор-функции. Вектор-функция

двух переменных. Предел, непрерывность, дифференцируемость вектор-функции двух переменных.

Раздел 2. Гладкие кривые

Элементарные гладкие кривые. Понятие гладкой кривой. Регулярная кривая. Эквивалентные кривые. Непараметризованная кривая. Касательная к гладкой кривой. Формулы Френе. Элементы трехгранника Френе. Формулы для вычисления кривизны и кручения. Геометрический смысл кривизны и кручения. Натуральное уравнение гладкой кривой. Неявно заданные кривые. Уравнение касательной к неявно заданной кривой. Обобщенные гладкие кривые.

Раздел 3. Гладкие поверхности

Элементарные гладкие поверхности. Параметрически заданные гладкие поверхности. Неявно заданные поверхности. Касательная плоскость к поверхности. Уравнение касательной плоскости к параметрически и неявно заданным поверхностям. Первая квадратичная форма поверхности и ее коэффициенты. Применение первой квадратичной формы поверхности к вычислению длин дуг, углов между гладкими кривыми и вычислению площадей кусков поверхности. Вторая квадратичная форма поверхности. Коэффициенты второй квадратичной формы. Расположение поверхности относительно касательной плоскости. Направления на поверхности. Плоские сечения. Кривизна нормального сечения. Теорема Менье. Криволинейные координаты и координатные линии на поверхности. Асимптотические линии на поверхности. Главные кривизны и главные направления. Линии кривизны. Нахождение главных кривизн, главных направлений и линий кривизны. Гауссовы и средние кривизны поверхности. Минимальные поверхности. Понятие о внутренней геометрии поверхностей. Блистательная теорема Гаусса.

Раздел 4. Тензоры алгебра в векторном пространстве.

Сопряженное векторное пространство. Тензорные обозначения. Преобразования базисов. Определения тензоров. Операции над тензорами. Тензорные поля на поверхности. Метрический тензор на поверхности. Вывод деривационных формул Гаусса.

Раздел 5. Геодезические линии на поверхностях.

Параллельный перенос векторного поля вдоль кривой и его свойства. Геодезическая кривизна кривой на поверхности. Определение и примеры геодезических линий. Вывод дифференциальных уравнений геодезических. Геодезические как наименее искривленные линии на поверхности. Геодезические на плоскости и на сфере. Механическая интерпретация геодезических линий. Геодезические на поверхностях вращения. Теорема Клеро. Качественное поведение геодезических на однополостном гиперболоиде вращения. Геодезические как локально кратчайшие линии на поверхности. Теорема Гаусса-Бонне и ее применения.

Раздел 6. Гладкие многообразия.

Гладкие структуры и гладкие отображения. Касательные векторы и касательные пространства. Дифференциал гладкого отображения. Регулярные и критические точки. Подмногообразия гладкого многообразия. Ориентации и ориентируемость. Гладкие многообразия с краем. Корректность определения внутренности и края. Край как гладкое подмногообразие. Прямые произведения гладких многообразий. Гладкие расслоения. Группы Ли.

Раздел 7. Тензорные поля и внешние формы.

Кокасательное пространство и его базис. Касательное и кокасательное расслоения. Векторные поля на многообразиях и их гладкость. Алгебра Ли векторных полей. Тензоры и операции над ними. Построение тензорных расслоений. Тензорные поля и их гладкость. Базис пространства k -линейных форм. Внешние формы. Внешнее умножение форм. Свойства альтернирования и внешнего умножения. Пространство внешних форм фиксированной степени и его базис. Формы объема. Внешние формы на многообразии (поля форм). Внешнее дифференцирование форм и его свойства. Связь с классическими дифференциальными операторами. Кодифференциал гладкого отображения и его свойства.

Раздел 8. Интегрирование на многообразиях.

Разбиение единицы на гладком многообразии. Интегрирование финитных внешних форм по многообразию. Формула Стокса. Следствия из формулы Стокса. Вывод классических теорем математического анализа (формул Грина, Гаусса-Остроградского, Стокса) и теоремы Коши для комплексных аналитических функций из общей формулы Стокса.

III. ОЦЕНИВАНИЕ

Результатом контрольной работы или экзамена студентов является оценка, выставляемая по 10-ти балльной шкале в соответствии со следующими критериями:

высшая оценка в 10 баллов выставляется при отличном выполнении заданий, то есть при наличии полных (с детальными пояснениями и культурой выкладок), оригинальных и правильных ответов и высококачественного оформления работы, а также при полном развернутом верном ответе на вопросы по содержанию курса;

оценка в 7-8-9 баллов выставляется при наличии верных и правильных ответов на вопросы по содержанию курса, при грамотном выполнении заданий, но при отсутствии какого-либо из выше перечисленных отличительных признаков, как, например: детальных выкладок или пояснений, качественного оформления;

оценка в 6 баллов выставляется при наличии отдельных неточностей в ответах на вопросы по содержанию курса и при выполнении заданий или при наличии замечаний к заданиям не принципиального характера (описки, случайные ошибки арифметического характера, грамматические ошибки);

оценка в 5 баллов выставляется в случаях, когда в ответах и в заданиях имеются неточности и ошибки, свидетельствующие о недостаточном понимании вопросов и требующие дополнительного обращения к тематическим материалам;

оценка в 4 балла выставляется при наличии серьезных ошибок и пробелов в знаниях по контролируемой тематике;

оценка в 3 балла выставляется при наличии лишь отдельных положительных моментов в выполненной заданий и представленных ответах на вопросы по содержанию курса;

оценка в 2 балла выставляется при полном отсутствии положительных моментов в выполненных заданиях и представленных ответах на вопросы по содержанию курса;

оценка в 1 или 0 баллов выставляется в случаях, когда небрежные записи, неправильные ответы, кроме того, сопровождаются какими-либо демонстративными проявлениями безграмотности или неэтичного отношения к изучаемой теме и предмету в целом.

Критерии оценки знаний, навыков

Преподаватель оценивает работу студентов на семинарских занятиях: оценивается правильность решения задач на семинаре. Оценки за работу на семинарских занятиях преподаватель выставляет в рабочую ведомость. Результирующая оценка по 10-ти балльной шкале за работу на семинарских занятиях также заносится в рабочую ведомость - $O_{\text{ауд}}$

Накопленная оценка за текущий контроль учитывает результаты студента по текущему контролю следующим образом:

$$\text{В 1 и 2 модуле } O_{\text{накопительная1}} = 0,5 * O_{\text{текущая}} + 0,5 * O_{\text{ауд. работа}} \text{ где}$$

$$O_{\text{текущая1}} = 0,5 * O_{\text{к/р}} + 0,5 * O_{\text{коллоквиум}}$$

$$\text{В 3 и 4 модуле } O_{\text{накопительная2}} = 0,5 * O_{\text{к/р}} + 0,5 * O_{\text{ауд. раб.}}$$

Результирующая оценка за итоговый контроль в форме экзамена выставляется по следующей формуле:

$$O_{\text{итоговая2}} = 0,6 * O_{\text{экзамен2}} + 0,4 * O_{\text{накопительная2}}$$

Способ округления оценок - арифметический.

Дисциплина изучается год. В диплом ставится оценка за итоговый контроль, которая выставляется по следующей формуле:

$$O_{\text{итоговая}} = 0,5 * O_{\text{итоговая2}} + 0,5 * O_{\text{промежуточная}}$$

где $O_{\text{промежуточная}} = 0,4 * O_{\text{накопительная1}} + 0,6 * O_{\text{экзамен1}}$ – промежуточная оценка за 1 и 2 модуль по дисциплине «Дифференциальная геометрия», $O_{\text{экзамен1}}$ – промежуточный экзамен по итогам 1 и 2 модуля.

IV. ПРИМЕРЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Примерные типы заданий для контрольных работ:

Вариант 00
Задачи

1 •	Вычислить производную вектор-функции.	1
2 •	Написать уравнение нормали к поверхности, заданной неявно, в данной точке.	1
3 •	Написать натуральное уравнение данной гладкой кривой.	2
4 •	Составить уравнение поверхности, образованной главными нормальными к данной кривой.	3
5 •	Найдите гауссову кривизну и главные кривизны данной поверхности. Выяснить, является ли эта поверхность минимальной.	3

Примерные типы заданий для коллоквиума:

1. Векторная функция скалярного аргумента. Дифференцирование и интегрирование векторных функций скалярного аргумента.
2. Кривые в пространстве. Параметризованная кривая.
3. Элементы трехгранника Френе.
4. Вывод формул Серре - Френе.
5. Геометрический смысл кривизны и кручения. Формулы для вычисления кривизны и кручения.
6. Натуральные уравнения кривой.
7. Различные способы задания поверхности. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
8. Первая квадратичная форма поверхности и ее применение.

Вопросы для оценки качества освоения дисциплин

Примерный перечень вопросов к экзамену по всему курсу

1. Векторная функция скалярного аргумента. Дифференцирование и интегрирование векторных функций скалярного аргумента. Годограф векторной функции.
2. Кривые в пространстве. Параметризованная кривая.
3. Касательная и нормаль к кривой. Поверхность и ее касательные. Нормаль поверхности. Особые точки. Неявное задание кривой.
4. Вывод формул Серре - Френе.
5. Геометрический смысл кривизны и кручения. Формулы для вычисления кривизны и кручения. Натуральные уравнения кривой.
6. Различные способы задания поверхности. Нормаль и касательная плоскость к поверхности.
7. Первая квадратичная форма поверхности. Длина дуги кривой на поверхности и угол между кривыми на поверхности. Вычисление площади поверхности.
8. Изгибание поверхностей. Понятие о внутренней геометрии поверхности.
9. Вторая квадратичная форма поверхности.

10. Главные кривизны и главные направления. Доказать их существование и вывести формулы для их вычисления.
11. Гауссова и средняя кривизны. Минимальные поверхности.
12. Нормальная и геодезическая кривизны гладкой кривой на поверхности. Геодезические линии. Геодезические на плоскости и на сфере.
13. Вывод дериационных формул Гаусса. Символы Кристоффеля.
14. Вывод уравнений геодезических.
15. Свойства геодезических линий.
16. Расположение поверхности относительно касательной плоскости. Классификация точек поверхности.
17. Метрический тензор и алгебра тензоров на поверхности.
18. Геодезические на поверхностях вращения. Доказательство теоремы Клеро.
19. Описать качественное поведение геодезических на эллипсоиде вращения.
20. Описать качественное поведение геодезических на однополостном гиперboloиде вращения.
21. Теорема Гаусса-Бонне и ее применение.
22. Сумма углов геодезического треугольника на поверхности.
23. Гладкие структуры и гладкие отображения.
24. Касательные векторы и касательные пространства.
25. Дифференциал гладкого отображения. Регулярные и критические точки.
26. Подмногообразия гладкого многообразия.
27. Гладкие многообразия с краем. Корректность определения внутренности и края.
28. Край как гладкое подмногообразие.
29. Ориентации и ориентируемость гладких многообразий.
30. Теорема о количестве ориентаций многообразия.
31. Теорема об инвариантности размерности при диффеоморфизме.
32. Алгебра Ли векторных полей.
33. Подмногообразия в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, заданные системой функциональных уравнений.
34. Построение тензорных расслоений.
35. Теорема о базисе пространства полилинейных форм фиксированной степени.
36. Свойства альтернирования и внешнего умножения форм.
37. Пространство внешних форм фиксированной степени и его базис.
38. Внешние формы на многообразии.
39. Внешнее дифференцирование форм и его свойства.
40. Кодифференциал гладкого отображения и его свойства.
41. Разбиение единицы на гладком многообразии.
42. Интегрирование финитных внешних форм по многообразию.
43. Формула Стокса.
44. Следствия из формулы Стокса.

Образец экзаменационного билета

Вариант 00		
Теоретические вопросы		
1	Геодезические на поверхностях вращения. Теорема Клеро.	2
2	Кодифференциал гладкого отображения и его свойства.	4
Задачи		
3	Найти уравнение главной нормали и бинормали кривой, заданной параметрически	2
4	Построить карту на $M = O(2)$, содержащую единичную матрицу EE , и найти голономный базис касательного пространства $T_E M$ в этой карте.	4

V. РЕСУРСЫ

1. Основная литература

1. Мищенко А.С, Фоменко А.Т. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии, М.: URRS, 2016.

2. Дополнительная литература

1. Мищенко А.С., Соловьев Ю.П., Фоменко А.Т. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии, М.: Из-во физ-мат. лит-ры, 2004, 412 с.

3. Программное обеспечение

№ п/п	Наименование	Условия доступа
1.	Windows Professional 8.1 Russian MS Office Professional Plus 2013	<i>Из внутренней сети университета (договор)</i>

4. Профессиональные базы данных, информационные справочные системы, интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)

№ п/п	Наименование	Условия доступа

	<i>Профессиональные базы данных, информационно-справочные системы</i>	
1.	Электронные образовательные ресурсы	<i>Договор на использование электронных баз данных/по подключению и обеспечению доступа к базам данных</i>
	<i>Интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)</i>	
1.	«Электронно-библиотечная система (ЭБС) Public.ru»	URL: https://www.public.ru/

5. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебные аудитории для лекционных и семинарских занятий по дисциплине обеспечивают использование и демонстрацию тематических иллюстраций, соответствующих программе дисциплины в составе:

- ПЭВМ с доступом в Интернет (операционная система, офисные программы, антивирусные программы);
- мультимедийный проектор с дистанционным управлением.