Программа учебной дисциплины «Дифференциальные уравнения»

Утверждена
Академическим советом ООП
Протокол № 4 от «24» мая 2016 г.

Автор	Парусникова А.В.
Число кредитов	4
Контактная работа (час.)	70
Самостоятельная работа (час.)	82
Курс	2
Формат изучения дисциплины	Очная

I. ЦЕЛЬ, РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И ПРЕРЕКВИЗИТЫ

Целями освоения дисциплины являются

- ознакомление студентов с основными положениями теории обыкновенных дифференциальных уравнений и теории устойчивости;
- знакомство с некоторыми прикладными задачами дисциплины.

В результате освоения дисциплины студент должен:

- уметь применять методы дисциплины для решения задач, возникающих в дисциплинах, использующих соответствующие методы;
- приобрести опыт применения современного инструментария дисциплины.

Изучение данной дисциплины базируется на следующих дисциплинах:

- Математический анализ;
- Алгебра;
- Линейная алгебра.

Для освоения учебной дисциплины студенты должны владеть следующими знаниями и компетенциями:

- знаниями основных определений и теорем, перечисленных выше дисциплин;
- навыками решения типовых задач этих дисциплин.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

- «Уравнения математической физики»;
- «Методы оптимизации»;
- «Теория вероятностей и математическая статистика»;
- «Теория случайных процессов»;
- «Физика»;
- «Теоретическая механика»;
- «Моделирование систем и процессов»;
- «Численные методы»;
- «Принятие оптимальных решений»;
- «Функциональный анализ»;
- «Теория функций комплексного переменного».

II. СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Раздел 1. Вводная часть. Основные понятия и определения

Определение обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ), порядка уравнения, решения ОДУ, ОДУ, разрешённого относительно старшей производной. Примеры.

Геометрическая интерпретация ОДУ первого порядка, разрешённого относительно производной. Поле направлений, изоклина, изолированная особая точка, интегральная кривая, интеграл, общее решение и общий интеграл ОДУ первого порядка, разрешённого относительно производной. Примеры.

Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

Раздел 2. Теорема Коши-Липшица. Продолжение решений

Задача Коши ОДУ первого порядка, разрешённого относительно производной. Эквивалентность рассматриваемой задачи Коши и соответствующего интегрального уравнения. Теорема Коши-Липшица. Теорема Пеано.

Продолжения решения ОДУ вправо (влево) для случаев ограниченной и неограниченной области. Теорема о предельном поведении решений. Примеры.

Раздел 3. Простейшие методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Построение интегральных кривых

Простейшие методы решения уравнений первого порядка: уравнений с разделяющимися переменными, однородных уравнений, линейных уравнений первого порядка, уравнений Бернулли, уравнений в полных дифференциалах. Простейшие методы решения уравнений старших порядков (некоторые типы уравнений, допускающие понижение порядка).

Теорема существования и единственности для уравнений с разделяющимися переменными; построение интегральных кривых таких уравнений. Теорема существования и единственности для однородных уравнений. Уравнение возможных касательных, инвариантный луч однородного уравнения. Свойства интегральных кривых однородного уравнения (подобие с центром подобия в нуле, поведение вблизи инвариантного луча). Построение интегральных кривых однородного уравнения.

Раздел 4. Линейные системы дифференциальных уравнений

Нормальная система ОДУ, решение нормальной системы ОДУ, задача Коши для нормальной системы ОДУ. Линейные однородные и линейные неоднородные системы ОДУ. Теорема существования и единственности для нормальной системы ОДУ и её применение к линейной системе дифференциальных уравнений с непрерывной матрицей и непрерывной вектор-функцией в правой части.

Линейно зависимая и линейно независимая система функций. Связь линейной зависимости вектор-функций и их значений. Определитель Вронского n-мерных вектор-функций. Связь равенства нулю определителя Вронского и линейной зависимости вектор-функций. Связь равенства нулю в некоторой точке вронскиана решений линейной однородной системы с непрерывной матрицей и линейной зависимости данных функций.

Фундаментальная система решений линейной однородной системы. Общее решение линейной однородной системы уравнений. Теорема об общем решении линейной однородной системы. Фундаментальная матрица линейной однородной системы и теорема о переходе от одной фундаментальной матрицы линейной однородной системы к другой. Формула Лиувилля-Остроградского.

Связь общего решения линейной неоднородной системы и линейной однородной системы. Метод вариации постоянных решения линейной неоднородной системы.

Раздел 5. Линейные дифференциальные уравнения

Переход от линейного уравнения n-го порядка к линейной системе, сохранение линейной зависимости решений линейного однородного уравнения и линейной однородной системы при данном переходе. Теорема об общем решении линейного однородного уравнения. Вронскиан системы функций и связь линейной зависимости функций и равенства их определителя Вронского нулю. Формула Лиувилля-Остроградского для линейных уравнений.

Построение линейного однородного уравнения по известной фундаментальной системе решений. Метод вариации постоянных решения линейного неоднородного уравнения. Интегральная формула Коши.

Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Теорема об общем решении линейного однородного уравнения в случае кратных и некратных корней характеристического уравнения.

Квазимногочлены и их свойства. Теорема об общем решении линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами с правой частью в виде квазимногочлена.

Раздел 6. Линейные системы с постоянными коэффициентами. Функции от матриц

Теорема об общем решении линейной однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Частное решении линейной неоднородной системы с постоянными коэффициентами с правой частью в виде векторного квазиполинома.

Предел матричной последовательности. Показательная функция матрицы. Связь фундаментальной системы решений линейной однородной системы и показательной функции матрицы. Построение функций от диагональной матрицы и от матрицы, приведённой к жордановой форме.

Раздел 7. Особые точки

Классификация изолированных особых точек линейной системы второго порядка с постоянными коэффициентами в терминах характеристических корней. Теорема Пуанкаре. Теорема Пуанкаре-Перрона. Примеры.

Раздел 8. Устойчивость

Автономная система ОДУ и её кинематическая интерпретация (фазовое пространство, фазовая траектория, фазовый портрет, стационарная точка системы и т.д.). Поведение траекторий автономной системы. Пример Лотки-Вольтерры.

Первый интеграл системы. Система канонических уравнений Гамильтона. Первый интеграл системы канонических уравнений Гамильтона.

Устойчивые и асимптотически устойчивые решения системы. Примеры исследования устойчивости решения системы по определению. Теорема об условии устойчивости нулевого решения линейной однородной системы с постоянными коэффициентами.

Производная функции в силу системы. Теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости. Теорема Четаева о неустойчивости. Примеры. Устойчивость по первому приближению.

III. ОЦЕНИВАНИЕ

Для прохождения контроля студент должен продемонстрировать знания основных определений, формулировок и доказательств теорем; умение решать типовые задачи, аналогичные разобранным на семинарских занятиях, а также уметь применять знания, полученные на лекциях, для решения теоретических задач.

Накопленная оценка за текущий контроль учитывает результаты студента по текущему контролю следующим образом:

$$O_{накопленная} = 0{,}4 \cdot O_{контр.раб.1} + 0{,}3 \cdot O_{самост.} + 0{,}3 \cdot O_{контр.раб.2}$$

В диплом выставляет результирующая оценка по учебной дисциплине, которая формируется по следующей формуле:

$$O_{результ} = 0{,}4 \cdot O_{накопленная} + 0{,}6 \cdot O_{экзамен}$$

Способ округления накопленной и результирующей оценки итогового контроля: для оценок выше 4 баллов – по правилам арифметики, для оценок меньше 4 баллов – в меньшую сторону.

На пересдаче студенту не предоставляется возможность получить дополнительный балл для компенсации оценки за текущий контроль.

IV. ПРИМЕРЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Оценочные средства для оценки качества освоения дисциплины в ходе текущего контроля

Контрольная работа 1

Контрольная работа 1 проводится по разделам 1-3. В ходе неё проверяется умение решать простейшие уравнений первого порядка, также проверяется умение решать дифференциальные уравнения старших порядков путём понижения порядка уравнения.

Самостоятельная работа

Самостоятельная работа проводится по разделам 4-5. В ходе неё проверяется умение решать линейные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью в виде квазимногочленов.

Контрольная работа 2

Контрольная работа 2 проводится по разделам 6-8. В ходе неё проверяется умение решать линейные однородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами; в контрольную входят задачи исследование устойчивости решений систем (в том числе, задачи, предполагающие исследование по определению).

Примерные варианты выдаются студентам через lms.

Примеры заданий промежуточной аттестации

Примерный список вопросов к экзамену

1. Дайте определение обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ), порядка уравнения, решения ОДУ, ОДУ, разрешённого относительно старшей производной. Приведите примеры.
2. Расскажите о геометрической интерпретации ОДУ первого порядка, разрешённого относительно производной (дайте определение поля направлений, изоклины, изолирован-

ной особой точки, интегральной кривой, интеграла, общего решения и общего интеграла ОДУ первого порядка, разрешённого относительно производной). Приведите примеры.

3. Приведите примеры физических задач, приводящих к дифференциальным уравнениям. Решите полученные уравнения.

4. Дайте определение задачи Коши ОДУ первого порядка, разрешённого относительно производной. Докажите теорему Коши-Липшица. Приведите (с обоснованием) условия на функцию $f(x,\,y)$, из которых следует, что функция $f(x,\,y)$ удовлетворяет условию Липшица. Покажите, что условие Липшица слабее рассмотренных условий. Приведите пример нарушения единственности решения рассматриваемой задачи Коши, если $\dfrac{\partial f(x,\,y)}{\partial y}$ не существует.

5. Сформулируйте теорему Пеано. Покажите, что непрерывность функции $f(x,\,y)$ существенна для существования решения задачи Коши, но не является необходимой.

6. Дайте определение продолжения решения ОДУ вправо (влево), определение продолжаемого решения, рассмотрите случаи ограниченной и неограниченной области. Сформулируйте теорему о предельном поведении решений. Докажите теорему Винтнера о неограниченной продолжаемости решений. Покажите, что условия теоремы Винтнера существенны, но не являются необходимыми.

7. Докажите теорему существования и единственности для уравнений с разделяющимися переменными. Исследуйте частные случаи (правая часть зависит только от одной переменной). Приведите пример построения интегральных кривых уравнения с разделяющимися переменными.

8. Докажите теорему существования и единственности для однородных уравнений.

9. Дайте определение уравнения возможных касательных однородного уравнение и определение инвариантного луча. Покажите, что интегральные кривые однородного уравнения подобны с центром подобия в нуле. Расскажите о поведении интегральных кривых вблизи инвариантного луча.

10. Дайте определение нормальной системы ОДУ, решения нормальной системы ОДУ, задачи Коши для нормальной системы ОДУ. Сформулируйте теорему существования и единственности для нормальной системы ОДУ. Дайте определение линейной однородной и линейной неоднородной системы. Примените теорему существования и единственности к линейной системе с непрерывной матрицей и непрерывной вектор-функцией в правой части.

11. Дайте определение линейно зависимой системы функций, линейно независимой системы функций. Докажите утверждение о связи линейной зависимости вектор-функций и их значений. Дайте определение вронскиана n-мерных вектор-функций. Докажите утверждения о связи равенства нулю определителя Вронского и линейной зависимости вектор-функций. Докажите лемму о связи равенства нулю вронскиана решений линейной однородной системы (ЛОС) в некоторой точке и линейной зависимости данных функций.

12. Дайте определение фундаментальной системы решений ЛОС. Дайте определение общего решения ЛОС. Докажите теорему об общем решении ЛОС. Дайте определение фундаментальной матрицы ЛОС. Докажите теорему о переходе от одной фундаментальной матрицы ЛОС к другой.

13. Выпишите формулу дифференцирования определителя матрицы. Докажите формулу Лиувилля-Остроградского для вронскиана решений ЛОС.

14. Докажите утверждение о связи общего решения линейной неоднородной системы (ЛНС) и ЛОС. Расскажите о методе вариации постоянных решения ЛНС.

15. Расскажите о переходе от линейного уравнения n-го порядка к линейной системе, докажите утверждения о сохранении линейной зависимости решений линейного однородного уравнения (ЛОУ) и ЛОС при данном переходе. Докажите теорему об общем решении ЛОУ. Дайте определение вронскиана системы функций и расскажите о связи линейной зависимости и равенства определителя Вронского нулю. Докажите формулу Лиувилля-Остроградского для линейных уравнений.

16. Расскажите о построении ЛОУ по известной фундаментальной системе решений. Расскажите о методе вариации постоянных решения линейного неоднородного уравнения (ЛНУ).

17. Докажите интегральную формулу Коши нахождения частного решения ЛНУ.

18. Дайте определение характеристического многочлена ЛОУ. Докажите теорему об общем решении ЛОУ с постоянными коэффициентами в случае некратных корней характеристического уравнения.

19. Докажите теорему об общем решении ЛОУ с постоянными коэффициентами в случае кратных корней характеристического уравнения, предварительно доказав формулу смещения.

20. Дайте определение квазимногочлена. Как связаны общее решение ЛНУ и общее решение ЛОУ? Докажите теорему об общем решении ЛНУ с постоянными коэффициентами с правой частью в виде квазимногочлена.

21. Докажите теорему об общем решении ЛОС с постоянными коэффициентами. Докажите теорему о частном решении ЛНС с постоянными коэффициентами с правой частью в виде векторного квазимногочлена.

22. Дайте определение линейного нормированного пространства. Введите норму в пространстве квадратных матриц, сформулируйте её свойства. Определите предел в пространстве матриц. Дайте определение показательной функции матрицы, покажите, что такое определение корректно (обоснуйте сходимость соответствующего ряда).

23. Расскажите о связи фундаментальной системы решений ЛОС с постоянной матрицей и показательной функции матрицы. Расскажите о построении функций от диагональной матрицы и от матрицы, приведённой к жордановой форме.

24. Изложите классификацию изолированных особых точек уравнения $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{cx+dy}{ax+by}$ в терминах характеристических корней. Приведите примеры для различных соотношений между характеристическими корнями. Сформулируйте теорему Пуанкаре (о классификации особых точек).

25. Дайте определение автономной системы ОДУ. Расскажите о кинематической интерпретации автономной системы (дайте определение фазового пространства, фазовой траек-

тории, фазового портрета системы, стационарной точки системы). Докажите утверждения, касающиеся поведения траекторий автономной системы.

26. Дайте определение различных типов особых точек, используя понятие ``исключительное направление``. Сформулируйте теорему Пуанкаре-Перрона. Постройте фазовые траектории для модели Лотки-Вольтерры для частного случая значений параметров.

27. Дайте определение устойчивого по Ляпунову решения системы. Дайте определение асимптотически устойчивого по Ляпунову решения системы. Приведите примеры исследования устойчивости решения системы по определению.

28. Докажите теорему об условии устойчивости нулевого решения ЛОС с постоянными коэффициентами. Сформулируйте теорему об исследовании устойчивости нулевого решения системы по первому приближению.

29. Дайте определение производной функции в силу системы. Докажите теорему Ляпунова об устойчивости и теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости решения системы. Приведите пример применения этих теорем.

V. РЕСУРСЫ

V.1Основная литература

1. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1975. (либо более позднее издание)
2. Петровский И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений : учебник, Наука. Гл. ред. физ.-мат. Лит., 1970 (либо более позднее издание)