

## Программа учебной дисциплины «Алгебра дискретных систем»

Утверждена

Академическим советом ООП

Протокол № от «08» июня 2018 г.

Автор	Карасев М.В., д.ф.-м.н., профессор
Число кредитов	4
Контактная работа (час.)	60
Самостоятельная работа (час.)	92
Курс	1
Формат изучения дисциплины	без использования онлайн курса

### I. ЦЕЛЬ, РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И ПРЕРЕКВИЗИТЫ

Целью освоения дисциплины «Алгебра дискретных систем» является изучение алгебраических алгоритмов вычисления точных и приближенных решений дискретных комплексов уравнений, состоящих из связанных (взаимодействующих) линейных колебательных систем.

В результате освоения дисциплины студент должен

**знать:**

- основные методы использования матричных алгебр для моделирования комплексов линейных динамических систем;
- общий алгебраический метод усреднения для анализа динамики динамических систем;
- базовые формулы некоммутативного анализа;

**уметь:**

- проводить алгебраические преобразования динамических систем к усредненной форме;
- анализировать усредненную систему методом редукции по алгебре симметрий;

**владеть:**

- навыками решения динамических систем с помощью алгебраического метода усреднения;
- навыками вычисления алгебр симметрий простейших комплексов колебательных систем;
- навыками вычислений с использованием некоммутативных алгебр матриц.

Изучение данной дисциплины базируется на следующих дисциплинах:

- «Линейная алгебра»
- «Дифференциальные уравнения»
- "Симметрии, представления и комплексный анализ
- «Асимптотические методы в дискретных задачах».

Основные положения дисциплины могут быть использованы в дальнейшем при подготовке выпускной квалификационной работы.

## II. СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

### *Тема 1. Алгебраические свойства линейных динамических систем.*

Алгебры Ли и алгебры Йордана. Матрицы Паули и Дирака. Экспоненциальная функция на матричной алгебре. Элементарная теория возмущений для динамических систем. Коммутирующие и некоммутирующие матрицы; свободная и запутанная динамика. Группа 3D-поворотов. Неавтономные динамические системы. Моделирование неавтономных вращений с помощью комплексификации алгебры.

### *Тема 2. Алгебры симметрий дискретных комплексов.*

Обратимые преобразования динамических систем и оператор коммутирования на матричной алгебре. Спектральное разложение матрицы и ее присоединенного оператора коммутирования. Коммутант матрицы и вырождение спектра. Теория возмущений в алгебре матриц. Как сделать матрицы коммутирующими? Гомологические уравнения. Динамическое решение гомологических уравнений. Эволюция возмущенных линейных систем на больших временах. Поправки первого и второго порядка. Некоммутативная группа линейных преобразований трехмерного пространства и потеря баланса в моделях типа «хищник-жертва».

### *Тема 3. Алгебраический метод усреднения.*

Сведение нелинейных динамических систем к линейным. Алгебра Ли векторных полей. Гамильтоновы системы. Скобки Пуассона. Решение на больших временах возмущенных нелинейных систем. Периодические траектории и резонансы. Редукция усредненной системы по некоммутативной алгебре симметрий. Пример: двумерный изотропный осциллятор с ангармоническим возмущением; симметрии Швингера; редукция к волчку Эйлера и уравнению Риккати.

### *Тема 4. Базовые формулы некоммутативного анализа.*

Функции от некоммутирующих матриц. Разностные производные и формулы некоммутативного анализа. Формула Кэмпбелла-Хаусдорфа. Алгебры и группы Ли. Парадоксы некоммутативности. Неравенство Вейля и соотношение неопределенности Гейзенберга. Коммутатор и скобки Пуассона. Антиккоммутатор, алгебры Клиффорда

## III. ОЦЕНИВАНИЕ

Оценки по всем формам текущего и итогового контроля выставляются по 10-ти балльной шкале.

Текущий контроль знаний и навыков студентов осуществляется преподавателем в ходе оценки работы студентов на семинарах (А) и проверки домашнего задания (С). Накопленная оценка Н определяется следующим образом:

$$H = 0.5 * (A+C).$$

Итоговый контроль знаний и навыков студентов проводится в виде экзамена, состоящего из теоретического вопроса и задачи.

Результирующая оценка за дисциплину рассчитывается следующим образом:

$$I = 0,4 * H + 0,6 * E,$$

где E - оценка за экзамен.

Накопленная и результирующая оценки округляются арифметическим способом.

## IV. ПРИМЕРЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

**Примерные темы домашних заданий**

1. Вычислить экспоненту от трехмерной кососимметрической матрицы, от матриц Паули и Дирака. Вычислить спектр и собственные проекторы этих матриц.
2. Указать формулу, которая с квадратичной точностью дает решение линейной динамической системы на больших временах.
3. Найти соотношения в алгебре, порожденной генераторами трехмерных вращений, и указать оператор Казимира для этой алгебры.
4. Найти генераторы и коммутационные соотношения алгебры симметрий двумерного осциллятора в случае резонанса 1: 2 .

### **Примерный список вопросов для подготовки к экзамену**

1. Линейные динамические системы и экспоненциальная функция на матричной алгебре. Элементарная теория возмущений для динамических систем.
2. Неавтономные динамические системы и их возмущение.
3. Алгебраическое преобразование возмущенной линейной системы к коммутативной форме и асимптотика решения на больших временах.
4. Спектральное разложение матрицы и ее присоединенного оператора коммутирования. Коммутант матрицы и вырождение спектра.
5. Теория возмущений в алгебре матриц. Как сделать матрицы коммутирующими? Гомологические уравнения.
6. Динамическое решение гомологических уравнений.
7. Сведение нелинейных динамических систем к линейным. Алгебра Ли векторных полей.
8. Решение гомологических уравнений и асимптотика решения на больших временах возмущенных нелинейных систем.
9. Гамильтоновы системы. Скобки Пуассона. Решение на больших временах возмущенных гамильтоновых систем.
10. Периодические траектории и резонансы. Редукция усредненной системы по некоммутативной алгебре симметрий.
11. Двумерный изотропный осциллятор с ангармоническим возмущением; симметрии Швингера; редукция к волчку Эйлера.
12. Двумерный изотропный осциллятор с ангармоническим возмущением; редукция к уравнению Риккати.
13. Функции от нескольких некоммутирующих матриц. Простейшие правила исчисления. Разностные производные и формул Ньютона.
14. Формула коммутации и смены порядка некоммутирующих матриц.
15. Формула Кэмпбелла-Хаусдорфа.
16. Континуальная версия формула Кэмпбелла-Хаусдорфа.
17. Коммутационное соотношение Гейзенберга и парадокс: «доказательство» соотношения  $0=1$ .
18. Неравенство Вейля и соотношение неопределенности Гейзенберга.
19. Алгебраическое вычисление спектра и собственных векторов квантового осциллятора.
20. Символы квантовых операторов. Коммутатор и скобки Пуассона.

## **V. РЕСУРСЫ**

### **1. Основная литература**

1. Арнольд, В. И. Математические методы классической механики: учеб. пособие для ун-тов / В. И. Арнольд. – Изд. 2-е, стер. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979 (или более новое издание). – 431 с.
2. S. J. Gustafson, I. M. Sigal, *Mathematical Concepts of Quantum Mechanics* / Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011 - <https://www.springer.com/us/book/9783642218651> -

ЭБС Springer.

- Alpay, D., Cipriani, F., Colombo, F., Guido, D., Sabadini, I., Sauvageot, J.-L., Noncommutative Analysis, Operator Theory and Applications / Springer International Publishing Switzerland 2016 - <https://www.springer.com/gp/book/9783319291147> - ЭБС Springer.

## 2. Дополнительная литература

Дополнительная литература доступна студентам в читальном зале библиотек ВШЭ, и/или других библиотек Москвы, и/или в электронной-библиотечной системе (ЭБС).

- Като, Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
- Беллман, Р. Введение в теорию матриц / Р. Беллман. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969 (или более позднее издание). – 367 с.
- Переломов, А. М. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли / А. М. Переломов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 238 с.
- Арнольд, В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений: уч. пособие / В. И. Арнольд. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. – 304 с.
- Богаевский, В. Н. Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений / В. Н. Богаевский, А. Я. Повзнер. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 255 с.

## 3. Программное обеспечение

№ п/п	Наименование	Условия доступа
1.	Microsoft Windows 7 Professional RUS Microsoft Windows 10 Microsoft Windows 8.1 Professional RUS	<i>Из внутренней сети университета (договор)</i>
2.	Microsoft Office Professional Plus 2010	<i>Из внутренней сети университета (договор)</i>

## 4. Профессиональные базы данных, информационные справочные системы, интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)

№ п/п	Наименование	Условия доступа
	<b><i>Профессиональные базы данных, информационно-справочные системы</i></b>	
1.	EqWorld Мир математических уравнений	URL: <a href="http://eqworld.ipmnet.ru/indexr.htm">http://eqworld.ipmnet.ru/indexr.htm</a>
2.	Электронно-библиотечная система Юрайт	URL: <a href="https://biblio-online.ru/">https://biblio-online.ru/</a>
	<b><i>Интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)</i></b>	

1.	Открытое образование	URL: <a href="https://openedu.ru/">https://openedu.ru/</a>
----	----------------------	--

## 5. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебные аудитории для лекционных занятий по дисциплине обеспечивают использование и демонстрацию тематических иллюстраций, соответствующих программе дисциплины в составе:

– ПЭВМ с доступом в Интернет (операционная система, офисные программы, антивирусные программы);

– мультимедийный проектор с дистанционным управлением.

Учебные аудитории для самостоятельных занятий по дисциплине оснащены ПЭВМ, с возможностью подключения к сети Интернет и доступом к электронной информационно-образовательной среде НИУ ВШЭ.