

Программа учебной дисциплины «Коммутативная алгебра»

Утверждена
Ученым советом факультета математики
Протокол № 18/91 от «29» мая 2018г.

Автор	А.С.Хорошкин
Число кредитов	5
Контактная работа (час.)	76
Самостоятельная работа (час.)	114
Курс	Для студентов образовательных программ, реализуемых факультетом математики
Формат изучения дисциплины	без использования онлайн курса

I. ЦЕЛЬ, РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И ПРЕРЕКВИЗИТЫ

Классическая алгебраическая геометрия изучает множества решений систем полиномиальных уравнений над алгебраически замкнутым полем. Рассмотрение полиномиальных уравнений с коэффициентами в более сложных кольцах, например, в кольце целых поля алгебраических чисел, приводит к современным задачам алгебраической геометрии и теории чисел. Коммутативная алгебра является основным алгебраическим инструментом для ответов на простейшие вопросы такого рода: является ли система уравнений конечно порождённой, имеет ли она решения в том или ином расширении, сколько неприводимых компонент имеет множество решений, каковы их размерности, гладки ли они и т. п.

Предварительная подготовка: обязательные курсы первых трёх семестров бакалавриата, особенно: основы алгебры (группы, кольца, поля), линейная алгебра (включая тензорные произведения), базовый курс геометрии.

II. СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Кольца и идеалы
2. Модули
3. Целая зависимость
4. Локализация
5. Примарное разложение
6. Дедекиндовы области
7. Теория размерности
8. Тензорное произведение
9. Длина

III. ОЦЕНИВАНИЕ

Оценка считается по формуле:

- Final written exam (50%),
- Written midterm (30%),
- Small tests during seminars (30%).

IV. ПРИМЕРЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Problem 3.1. Consider the subalgebra $\mathbb{k} \oplus (x) \subset \mathbb{k}[x, y]$ and show that

- (a) A subring of a noetherian ring need not be noetherian;
- (b) A subalgebra of a finitely generated algebra need not be finitely generated.

Problem 3.2. Let R be a noetherian ring. Prove that the ring of formal power series $R[[x]]$ is noetherian.

Problem 3.3*. Is every subalgebra of a polynomial ring in one variable $\mathbb{C}[x]$ finitely generated? Give a proof or a counterexample.

Problem 3.4. A ring R is called graded if it has a direct sum decomposition (as an abelian group):

$$R = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus \dots = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$$

Such that for all *homogeneous* elements $a \in R_n, b \in R_m$ their product ab belongs to R_{m+n} .

- (a) Find a grading on $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$.
- (b) Show that $I := \bigoplus_{n > 0} R_n$ is an ideal called *irrelevant ideal*;
- (c) Show that the following is equivalent for a graded ring R :
 - R is noetherian;
 - R_0 is noetherian and I is finitely generated;
 - R is of finite type over a noetherian ring R_0 .

V. РЕСУРСЫ

1. Основная литература

Введение в коммутативную алгебру / М. Атья, И. Макдональд; Пер. с англ. Ю. И. Манина. – М.: Факториал Пресс, 2003. – 144 с. – (Сер. "XX век. Математика и механика"; Вып.4). - ISBN 5-88688-067-4.

2. Дополнительная литература

Коммутативная алгебра с прицелом на алгебраическую геометрию / Д. Айзенбад; Пер. с англ. О. Н. Попова, и др.; Пер. с англ. под ред. Е. С. Голода. – М.: МЦНМО, 2017. – 750 с. - ISBN 978-5-4439-0362-0: 585.00.

3. Программное обеспечение

п/п	Наименование	Условия доступа
.	Microsoft Windows 7 Professional RUS Microsoft Windows 10 Microsoft Windows 8.1 Professional RUS	Из внутренней сети университета (договор)
.	Microsoft Office Professional Plus 2010	Из внутренней сети университета (договор)
.	LaTeX пакет верстки научных текстов	Свободно распространяемый программный продукт

4. Профессиональные базы данных, информационные справочные системы, интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)

№ п/п	Наименование	Условия доступа
----------	--------------	-----------------

<i>Профессиональные базы данных, информационно-справочные системы</i>		
1.	База препринтов Cornell University	https://arxiv.org/
2.	База данных зарубежной периодики MathSciNet	Онлайн доступ из локальной сети НИУ ВШЭ
<i>Интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)</i>		
1.	Открытое образование	https://openedu.ru
2.	Coursera	http://www.coursera.org
3.	edX	https://www.edx.org/course
4.	MITOPENCOURSE WARE	https://ocw.mit.edu/index.htm

5. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебные аудитории для лекционных занятий по дисциплине обеспечивают использование и демонстрацию тематических иллюстраций, соответствующих программе дисциплины в составе:

- ПЭВМ с доступом в Интернет (операционная система, офисные программы, антивирусные программы);

- мультимедийный проектор с дистанционным управлением.

Учебные аудитории для самостоятельных занятий по дисциплине оснащены персональными компьютерами, с возможностью подключения к сети Интернет и доступом к электронной информационно-образовательной среде НИУ ВШЭ.