Программа учебной дисциплины «Алгебра»

Утверждена
Академическим советом ООП
Протокол №1 от «31» августа 2018 г.

Автор	Бусяцкая Ирина Константиновна
Число кредитов	8
Контактная работа (час.)	144
Самостоятельная работа (час.)	160
Курс	1
Формат изучения дисциплины	очная

I. ЦЕЛЬ, РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И ПРЕРЕКВИЗИТЫ

II.

Целями освоения дисциплины «Алгебра» являются:

– знакомство с понятиями линейной алгебры как основы значительной части математического аппарата дифференциальных уравнений, функционального анализа, теории вероятностей, математической статистики и других дисциплин;

– освоение основных приемов решения практических задач по темам дисциплины;

– развитие способности интерпретации формальных алгебраических структур, развитие четкого логического мышления.

В результате освоения дисциплины студент должен:

- Знать базовые понятия дисциплины
- Понимать доказательства ключевых теорем курса
- Иметь навыки использования математического аппарата дисциплины в дальнейшей учебной и профессиональной деятельности.

Настоящая дисциплина относится к базовой части математического и естественно-научного цикла дисциплин.

III. СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Изложение строится по разделам и темам. Содержание темы может распределяться по лекционным и практическим занятиям.

1. Алгебра матриц .

Определение и свойства основных операций над матрицами: умножение матрицы на число, сложение матриц, умножение матриц, транспонирование матриц. Элементарные преобразования матриц и элементарные матрицы. Теорема о связи между элементарными преобразованиями матриц и умножением матрицы на элементарную. Приведение матрицы к ступенчатому и главному ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований.

Аудиторная работа-12 часов.

Самостоятельная работа-12 часов:

-подготовка к лекциям и практическим занятиям

-выполнение домашних работ, задаваемых на практических занятиях.

Для освоения раздела предусмотрено обсуждение фундаментальных понятий дисциплины, их взаимосвязей, решение теоретических и вычислительных задач.

2. Системы линейных алгебраических уравнений. Линейное пространство n
Классификация системы линейных алгебраических уравнений (далее СЛУ). Матрицы, связанные с СЛУ. Равносильность СЛУ с эквивалентными матрицами. Метод Гаусса решения СЛУ. Свойства решений однородных СЛУ.
Аудиторная работа-12 часов.
Самостоятельная работа-16 часов:
-подготовка к лекциям и практическим занятиям
-выполнение домашних работ, задаваемых на практических занятиях.
-выполнение задания по текущему контролю: домашняя работа 1 (часть 1).
Для освоения раздела предусмотрено обсуждение фундаментальных понятий дисциплины, их взаимосвязей, решение теоретических и вычислительных задач.

3. Линейное пространство n
Пространство n, линейно зависимые и независимые системы векторов в n. Сохранение линейных соотношений между столбцами матрицы при элементарных преобразованиях ее строк. Лемма о линейной зависимости. Базис системы векторов, теорема о его существовании. Ранг системы векторов. Ранг матрицы и способ его нахождения. Теорема Кронекера – Капелли. Линейные подпространства n, заданные системой линейных однородных уравнений. Нахождение базиса и размерности такого подпространства. Линейные оболочки систем векторов. Нахождение их базиса и размерности. Терема о связи между множеством решений неоднородной СЛУ и подпространством решений соответствующей однородной СЛУ.
Аудиторная работа-12 часов.
Самостоятельная работа-12 часов:
-подготовка к лекциям и практическим занятиям
-выполнение домашних работ, задаваемых на практических занятиях.
-выполнение задания по текущему контролю: домашняя работа 1 (часть2).
Для освоения раздела предусмотрено обсуждение фундаментальных понятий дисциплины, их взаимосвязей, решение теоретических и вычислительных задач.

4. Определители
Определители порядка n и их основные свойства. Примеры вычисления определителей с помощью элементарных преобразований матрицы. Алгебраические дополнения и миноры. Теорема о связи между ними. Теорема о разложении определителя по строке. Теорема об определителе произведения матриц. Обратная матрица и способы ее нахождения. Теорема и формулы Крамера.
Аудиторная работа-12 часов.
Самостоятельная работа-16 часов:
-подготовка к лекциям и практическим занятиям
-выполнение домашних работ, задаваемых на практических занятиях.
Для освоения раздела предусмотрено обсуждение фундаментальных понятий дисциплины, их взаимосвязей, решение теоретических и вычислительных задач.

5. Вещественные евклидовы пространства
Определение и примеры евклидовых пространств. Неравенство Коши – Буняковского, длина вектора в евклидовом пространстве и ее свойства. Ортогональные системы векторов и процесс ортогонализации. Теорема об изоморфизме конечномерных евклидовых про-

странств. Теорема о проекции вектора на подпространство. Задача о наилучшем приближении. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Метод наименьших квадратов и примеры его применения.
Аудиторная работа-12 часов.
Самостоятельная работа-10 часов:
-подготовка к лекциям и практическим занятиям
-выполнение домашних работ, задаваемых на практических занятиях.
-выполнение задания по текущему контролю: письменная контрольная работа ,выполняемая в аудитории.
Для освоения раздела предусмотрено обсуждение фундаментальных понятий дисциплины, их взаимосвязей, решение теоретических и вычислительных задач.

6. Поле комплексных чисел и кольцо многочленов
Определение комплексных чисел. Действия над комплексными числами. Тригонометрическая и показательная форма комплексного числа. Формула Муавра. Извлечение корня n-й степени из комплексного числа.
Определение и примеры полей. Кольцо многочленов с коэффициентами в поле. Наибольший делитель двух многочленов. Алгоритм Евклида и его следствия. Корни многочленов. Теорема Безу. Кратность корня. Отделение кратных корней. Теорема Гаусса. Неприводимые многочлены. Описание неприводимых многочленов с комплексными и вещественными коэффициентами. Разложение многочлена на неприводимые многочлены. Полиномиальная интерполяция. Интерполяционные многочлены Лагранжа и Эрмита.
Аудиторная работа-12 часов.
Самостоятельная работа-16 часов:
-подготовка к лекциям и практическим занятиям
-выполнение домашних работ, задаваемых на практических занятиях.
-выполнение задания по текущему контролю: письменная контрольная работа ,выполняемая в аудитории.
Для освоения раздела предусмотрено обсуждение фундаментальных понятий дисциплины, их взаимосвязей, решение теоретических и вычислительных задач.

7 Линейные пространства над полем .
Определение и примеры линейных пространств Линейная зависимость и независимость систем векторов. Бесконечномерные и конечномерные линейные пространства. Базис и размерность линейных пространств. Координаты векторов и их изменение при замене базиса. Теорема об изоморфизме линейных пространств.
Аудиторная работа-8 часов.
Самостоятельная работа-12 часов:
-подготовка к лекциям и практическим занятиям
-выполнение домашних работ, задаваемых на практических занятиях.
Для освоения раздела предусмотрено обсуждение фундаментальных понятий дисциплины, их взаимосвязей, решение теоретических и вычислительных задач.

8. Линейные отображения и линейные операторы
Определение и примеры линейных отображений. Линейное пространство л. Матрицы линейных отображений и их свойства. Изменение матрицы линейного отображения при замене базисов. Линейные операторы и их матрицы. Собственные значения и собственные векторы линейных операторов, способ их нахождения. Достаточные условия и критерии диагонализуемости оператора. Жорданова форма матрицы. Функции от матриц.
Свойства жордановых клеток и жордановых матриц. Теорема о существовании жордановой формы матрицы и способ нахождения жордановой формы. Функции от матриц и от операторов.

Аудиторная работа-24 часа.
Самостоятельная работа-24 часа:
-подготовка к лекциям и практическим занятиям
-выполнение домашних работ, задаваемых на практических занятиях.
-выполнение задания по текущему контролю: домашняя работа 2 (часть1 и часть2).
Для освоения раздела предусмотрено обсуждение фундаментальных понятий дисциплины, их взаимосвязей, решение теоретических и вычислительных задач.

9. Комплексные евклидовы пространства
Определение и примеры комплексных евклидовых (унитарных) пространств. Неравенство Коши – Буняковского.
Ортогональные системы векторов и процесс ортогонализации. Теорема об изоморфизме унитарных пространств одинаковой размерности. Комплексификация вещественных евклидовых пространств.
Аудиторная работа-8 часов.
Самостоятельная работа-10 часов:
-подготовка к лекциям и практическим занятиям
-выполнение домашних работ, задаваемых на практических занятиях.
Для освоения раздела предусмотрено обсуждение фундаментальных понятий дисциплины, их взаимосвязей, решение теоретических и вычислительных задач.

10 Линейные операторы в евклидовых и унитарных пространствах
Понятие сопряженного оператора. Его существование и единственность. Свойства операции сопряжения, матрица сопряженного оператора. Самосопряженные операторы и симметрические матрицы. Свойства собственных значений, собственных векторов и инвариантных подпространств самосопряженного оператора. Изометрические операторы и их свойства Ортогональные и унитарные матрицы..Канонический вид изометрического оператора. Описание ортогональных операторов на плоскости и в пространстве. .
Аудиторная работа-16 часов.
Самостоятельная работа-16 часов:
-подготовка к лекциям и практическим занятиям
-выполнение домашних работ, задаваемых на практических занятиях.
-выполнение задания по текущему контролю: письменная контрольная работа ,выполняемая в аудитории.
Для освоения раздела предусмотрено обсуждение фундаментальных понятий дисциплины, их взаимосвязей, решение теоретических и вычислительных задач.

11. Билинейные и квадратичные формы
Определение и примеры билинейных и квадратичных форм. . Матрицы билинейных и квадратичных форм. Теорема о приведении квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием. Приведение уравнения поверхности 2-го порядка к каноническому виду.
Аудиторная работа-16 часов.
Самостоятельная работа-16 часов:
-подготовка к лекциям и практическим занятиям
-выполнение домашних работ, задаваемых на практических занятиях.
Для освоения раздела предусмотрено обсуждение фундаментальных понятий дисциплины, их взаимосвязей, решение теоретических и вычислительных задач.

III. ОЦЕНИВАНИЕ

Преподаватель оценивает работу студентов на семинарских занятиях: ,активность студентов при обсуждении фундаментальных понятий курса, правильность решения задач и ответов на вопросы преподавателя на семинаре. Оценки за работу на семинарских и практических занятиях преподаватель выставляет в рабочую ведомость. Накопленная оценка по 10-ти балльной шкале за работу на практических занятиях определяется перед промежуточным или итоговым контролем - $O_{аудиторная}$.

Преподаватель оценивает самостоятельную работу студентов: оценивается правильность выполнения домашних заданий , которые выдаются на практических занятиях , знание определений изучаемых понятий. Оценки за самостоятельную работу студента преподаватель выставляет в рабочую ведомость. Накопленная оценка по 10-ти балльной шкале за самостоятельную работу определяется перед промежуточным или итоговым контролем – $O_{сам.\ работа}$.

Накопленная оценка за текущий контроль учитывает результаты студента по текущему контролю следующим образом:

$$O_{накопленная} = 0{,}5 * O_{текущий} + 0{,}25 * O_{ауд} + 0{,}25 * O_{сам.работа}$$

где $O_{текущий}$ рассчитывается как взвешенная сумма всех форм текущего контроля, предусмотренных в РУП

$$O_{текущий} = 0{,}6 \cdot O_{к/р} + 0{,}4\, O_{дз};$$

Способ округления накопленной оценки текущего контроля производится в пользу студента.

Результирующая оценка за дисциплину рассчитывается следующим образом:

1. За один модуль:

$$O_{результ} = 0{,}5 * O_{накопл} + 0{,}5 * \cdot O_{экз/зач}$$

Способ округления накопленной оценки промежуточного (итогового) контроля в форме зачета производится в пользу студента .

2. За несколько модулей –как среднее арифметическое результирующих оценок за каждый модуль

На пересдаче студенту не предоставляется возможность получить дополнительный балл для компенсации оценки за текущий контроль.

На зачете студент может получить дополнительный вопрос (дополнительную практическую задачу, решить к пересдаче домашнее задание), ответ на который оценивается в 1 балл.

На экзамене студент может получить дополнительный вопрос (дополнительную практическую задачу, решить к пересдаче домашнее задание), ответ на который оценивается в 1 балл.

В диплом выставляет результирующая оценка по учебной дисциплине, которая формируется по следующей формуле:

$$O_{\text{результ}} = 0{,}5O_{\text{накопл}} + 0{,}5O_{\text{итоговый}}$$

Способ округления результирующей оценки по учебной дисциплине: в пользу студента.

ВНИМАНИЕ: оценка за итоговый контроль **блокирующая,** при неудовлетворительной итоговой оценке она равна результирующей.

IV. ПРИМЕРЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

<u>Примерный вариант для домашнего задания 1</u>

Системы линейных уравнений

Дана матрица A:$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. а) Записать систему линейных алгебраических уравнений, расширенною матрицею которой служит матрица A.

б) Привести матрицу A с помощью элементарных преобразований над строками к главной ступенчатой матрице B.

в) Указать, какие неизвестные в системе уравнений, построенной в пункте а), являются главными, а какие − свободными. Найти общее решение этой системы уравнений. Решение выразить в в виде явных формул, выражающих главные неизвестные через свободные; в параметрической форме; в векторно-параметрической форме. Найти какое-либо частное решение системы.

г) Записать однородную систему линейных уравнений, соответствующую системе, построенной в пункте а). Найти её общее решение в трех видах (см. пункт в)). Найти базис подпространства её решений.

д) Записать общее решение неоднородной системы уравнений как сумму общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы (в векторном виде).

2. а) Найти базис набора столбцов матрицы *A*.

б) Выразить каждый столбец в виде линейной комбинации базисных столбцов.

в) Найти ранг матрицы *A*

<u>Примерный вариант для домашнего задания 2</u>

Линейные операторы (часть 1)

Даны линейные операторы φ и ψ в пространстве $V3$.

1. Найти матрицы операторов φ, ψ и $\varphi\cdot\psi$ в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

2. Найти ядро и образ операторов φ и ψ. В случае ненулевого ядра описать их уравнениями.

3. Выяснить, существует ли обратный оператор для □□□. Если да, то описать его геометрический смысл; если нет, то указать причину.

1. Поворот вокруг оси а) OZ на $90°$; б) OZ на $45°$; в) OX на $45°$; г) OX на $30°$; д) OY на $90°$; е) OY на $60°$.

2. Ортогональное проектирование на плоскость а) $x + y + z = 0$; б) $x - y + z = 0$; в) $x + y - z = 0$.

3. Ортогональное проектирование на ось а) $x = 0, y = z$; б) $x = z, y = 0$; в) $x = y = z$.

4. Зеркальное отражение относительно плоскости а) $x + y + z = 0$; б) $x - y + z = 0$; в) $x + y - z = 0$.

5. Зеркальное отражение относительно оси а) $x = y, z = 0$; б) $x = z$, $y = 0$; в) $x = y = z$.

6. Векторное умножение на вектор а) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$; б) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$; в) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$; г) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{k}$; д) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$; е) $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$.

Линейные операторы (часть 2)

Дана матрица *A*, которая является матрицей оператора φ в стандартном базисе пространства $\mathbf{R}^3$.

1. Найти собственные числа и собственные векторы оператора φ.

2. Убедившись в существовании базиса пространства $\mathbf{R}^3$, состоящего из собственных векторов оператора φ , записать матрицу оператора φ в таком базисе.

3. Указать матрицу перехода к новому базису из собственных векторов и проверить справедливость формулы, связывающей матрицы оператора в разных базисах.

Условия вариантов
(матрица A)

1. $\begin{pmatrix} -11 & 0 & 12 \\ -3 & 1 & 3 \\ -9 & 0 & 10 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix} -6 & -2 & 6 \\ -2 & -3 & 3 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. **3.** $\begin{pmatrix} -13 & -6 & 18 \\ -6 & -4 & 9 \\ -12 & -6 & 17 \end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} -14 & -6 & 18 \\ -6 & -5 & 9 \\ -12 & -6 & 16 \end{pmatrix}$. **6.** $\begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ -3 & -5 & 6 \\ -3 & -6 & 7 \end{pmatrix}$. **7.** $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 6 \\ 12 & 1 & 12 \\ -9 & 0 & -8 \end{pmatrix}$. **8.** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & 12 \\ -3 & -3 & -7 \end{pmatrix}$. **10.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **11.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 6 & 4 & 12 \\ -3 & -3 & -8 \end{pmatrix}$. **12.** $\begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 13 & 0 & -12 \\ -6 & 1 & 6 \\ 15 & 0 & -14 \end{pmatrix}$. **14.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$. **15.** $\begin{pmatrix} 8 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 9 & 3 & -7 \end{pmatrix}$. **16.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Прием домашнего задания проводится в форме собеседования , в ходе которого обсуждаются вопросы теории, используемые при решении задания.

Вопросы для оценки качества освоения дисциплины

Примерный перечень вопросов к зачету (экзамену) по всему курсу или к каждому промежуточному и итоговому контролю для самопроверки с

Вопросы к экзамену по всему курсу

I часть. Вопросы по матрицам и определителям

1. Определить сумму матриц и произведение матрицы на число. Вывести свойства этих операций. Записать матрицу $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ в виде линейной комбинации базисных матриц.

2. Определить произведение двух квадратных матриц. Вывести свойства произведения. Найти все матрицы, перестановочные с $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Определить произведение прямоугольных матриц (когда это возможно).

3. Дать определение элементарных преобразований над строками матрицы и элементарных матриц. Записать элементарные матрицы второго порядка.

4. Сформулировать теорему об умножении матрицы на элементарные. Привести пример для матриц третьего порядка.

5. Дать определение ступенчатой матрицы, матрицы главного ступенчатого вида. Привести пример. Сформулировать теорему Гаусса.

6. Дать определение определителя матрицы порядка n. Сформулировать его свойства.

7. Сформулировать теоремы об антисимметрии и о линейности определителя, вывести следствия.

8. Показать, как меняется определитель матрицы при элементарных преобразованиях над строками матрицы.

9. Доказать теорему об определителе треугольной матрицы.

10. Изложить метод Гаусса вычисления определителя матрицы приведением к треугольному виду. Привести пример.

11. Дать определение невырожденной матрицы. Показать, каков главный ступенчатый вид невырожденной матрицы. Доказать, что она раскладывается в произведение элементарных матриц.

12. Дать определение вырожденной матрицы. Показать, каков главный ступенчатый вид вырожденной матрицы. Доказать, что она раскладывается в произведение элементарных матриц и ступенчатой матрицы с последней нулевой строкой.

13. Дать определение алгебраического дополнения элемента матрицы. Записать разложение определителя по i-й строке и j-му столбцу.

14. Доказать теорему о разложении определителя по элементам строки.

15. Доказать, что сумма произведений элементов строки на алгебраические дополнения элементов другой строки равна нулю. Верно ли это для столбцов?

16. Доказать теорему об определителе произведения двух матриц.

17. Дать определение матрицы, обратной к данной. Доказать её единственность. Вывести необходимое условие обратимости матрицы.

18. Доказать, что элементарные матрицы обратимы, и найти к ним обратные.

19. Изложить и обосновать метод Гаусса нахождения обратной матрицы. Привести примеры.

20. Вывести формулу для нахождения обратной матрицы. Достаточное условие существования обратной матрицы.

II часть. Вопросы по системам линейных уравнений

21. Дать определение системы линейных уравнений, совместной и несовместной системы. Привести примеры.

22. Дать определение матрицы системы, расширенной матрицы. Записать в матричном виде систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1; \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases}$$

23. Дать определение решения системы, множества$V(\hat{A})$, определённой и неопределённой системы. Привести примеры.

24. Дать определение равносильных систем. Показать, что при элементарных преобразованиях над строками расширенной матрицы система переходит в равносильную.

25. Изложить метод решения систем главного ступенчатого вида. В каком случае такая система несовместна?

26. Изложить метод Гаусса решения систем линейных уравнений на примере

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

27. Дать определение однородной и неоднородной систем. Показать, что однородная система всегда совместна.

28. Доказать, что однородная система m уравнений с n неизвестными при $m < n$ имеет нетривиальное решение. (Сколько таких решений?)

29. Дать определение линейного пространства $\mathbb{R}^n$, линейно зависимой и линейно независимой системы векторов. Привести примеры таких систем в $\mathbb{R}^n$.

30. Доказать, что k векторов в пространстве $\mathbb{R}^n$ линейно зависимы при $k > n$. Показать, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ существует система из n линейно независимых векторов. (Единственна ли такая система?)

31. Дать определение линейного подпространства. Привести примеры. Дать определение линейной оболочки векторов. Доказать, что она является линейным подпространством. Почему этот пример является универсальным?

32. Доказать, что множество решений однородной системы является линейным подпространством.

33. Дать два определения базиса множества M и показать их равносильность.

34. Дать определение размерности множества. Объяснить, как найти размерность линейной оболочки векторов.

35. Вывести формулу размерности подпространства решений$V(\hat{A})$для однородной системы линейных уравнений.

36. Дать определение ранга матрицы. Найти по определению ранг матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

37. Изложить и обосновать метод нахождения ранга матрицы.

38. Изложить метод нахождения базиса конечной системы векторов.

39. Теорема Кронекера – Капелли.

40. Дать определение фундаментальной системы решений. Записать формулу общего решения однородной и неоднородной систем.

III часть. Вопросы по евклидовым пространствам

41. Дать определение евклидова пространства. Привести примеры.

42. Дать определение матрицы Грама системы векторов $G(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$. Найти матрицу Грама ортонормированного базиса.

43. Дать определение длины вектора, угла между векторами. Доказать неравенство Коши – Буняковского.

44. Дать определение скалярного произведения. Вывести формулу для вычисления скалярного произведения через матрицу Грама.

45. Дать определение ортогонального и ортонормированного базиса. Описать процесс ортогонализации.

46. Дать определение ортогонального дополнения $L^{\perp}$ к линейному подпространству L. Доказать, что $L^{\perp}$ является линейным подпространством.

47. Дать определение прямой суммы подпространств. Доказать, что $E = L \oplus L^{\perp}$.

48. Доказать неравенство треугольника и теорему Пифагора.

49. Дать определение вектора, ортогонального подпространству. Доказать, что вектор ортогонален подпространству тогда и только тогда, когда он ортогонален базису этого подпространства.

50. Дать определение проекции вектора на подпространство. Доказать её существование и единственность.

51. Дать определение проекции вектора на подпространство. Вывести основные свойства проекции вектора на подпространство (линейность, минимальность).

52. Изложить метод нахождения проекции вектора на подпространство, используя ортонормированный базис.

53. Дать определение ортогональной составляющей вектора при проектировании на подпространство. Доказать её существование и единственность.

54. Метод наименьших квадратов. Постановка задачи, метод решения.

55. Дать определение решения системы по методу наименьших квадратов. Доказать его существование.

56. Изложить метод нахождения проекции вектора на подпространство, используя матрицу Грама.

57. Метод наименьших квадратов. Постановка задачи. Всегда ли существует решение? Единственно ли оно?

58. Доказать, что ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.

IVчасть. Вопросы по теории линейных операторов

1. Дать определение линейного оператора в $\mathbf{R}^n$. Привести примеры. Описать линейные операторы в $\mathbf{R}^1$.

2. Дать определение матрицы линейного оператора в данном базисе. Привести примеры.

3. Дать определения ядра и образа линейного оператора. Привести примеры.

4. Дать определения суммы линейных операторов и произведения линейного оператора на число. Доказать, что эти операторы линейны. Найти их матрицы.

5. Дать определение произведения (композиции) линейных операторов. Доказать линейность этого оператора. Найти его матрицу.

6. Дать определение оператора, обратного к данному. Привести примеры. Вывести необходимое и достаточное условие обратимости оператора.

7. Доказать, что ядро и образ линейного оператора – линейные подпространства. Найти их размерности.

8. Дать определение изоморфизма. Вывести необходимые и достаточные условия, при которых линейный оператор является изоморфизмом.

9. Дать определения собственного вектора и собственного значения линейного оператора. Привести примеры.

10. Дать определения характеристического многочлена оператора, спектра оператора. Доказать, что вещественные корни характеристического многочлена являются собственными значениями оператора.

11. Изложить метод нахождения собственных векторов линейного оператора.

12. Определить оператор умножения на матрицу A в $\mathbf{R}^n$. Найти матрицу этого оператора в стандартном базисе и ядро.

13. Доказать, что собственные векторы линейного оператора, соответствующие различным собственным значениям, линейно независимы.

14. Доказать, что матрица оператора в базисе из собственных векторов диагональна.

15. Дать определение собственных подпространств линейного оператора. Привести примеры.

16. Дать определение диагонализуемого оператора. Привести пример и контрпример.

17. Сформулировать теорему о диагонализуемом операторе. Привести примеры.

18. Дать определение инвариантного подпространства линейного оператора.

19. Дать определение матрицы перехода от одного базиса к другому. Вывести формулы преобразования координат вектора.

20. Вывести формулу преобразования матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.

21. Дать определение подобных матриц. Доказать, что характеристические многочлены, спектры и ранги подобных матриц совпадают.

22. Рассмотреть оператор умножения на жорданову клетку. Найти собственные векторы этого оператора. Доказать, что он не диагонализуем.

V часть. Вопросы по теории линейных операторов в евклидовых пространствах

1. Дать определение комплексного евклидова пространства. Привести примеры. Определить длину вектора и ортогональность пары векторов.

2. Дать определение оператора, сопряжённого к данному. Доказать его единственность. Привести примеры.

3. Доказать теорему о существовании сопряжённого оператора.

4. Дать определение самосопряжённого оператора. Привести примеры.

5. Дать определение симметрической матрицы. Показать, что матрица самосопряжённого оператора в ортонормированном базисе симметрическая.

6. Доказать, что если L – инвариантное подпространство самосопряжённого оператора, то $L^{\perp}$ также инвариантно.

7. Доказать, что собственные значения самосопряжённого оператора вещественны.

8. Доказать теорему о каноническом виде самосопряжённого оператора.

9. Доказать, что собственные векторы самосопряжённого оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

10. Дать определение изометрического оператора. Описать его ядро.

11. Доказать, что изометрический оператор сохраняет скалярное произведение.

12. Дать определение ортогональной матрицы. Вывести её свойства.

13. Доказать, что матрица изометрического оператора в ортонормированном базисе вещественного евклидова пространства ортогональна.

14. Доказать, что собственные значения изометрического оператора по модулю равны единице.

15. Доказать, что если L – инвариантное подпространство изометрического оператора, то $L^{\perp}$ также инвариантно.

16. Доказать теорему о каноническом виде изометрического оператора в комплексном евклидовом пространстве.

17. Описать изометрические операторы в одномерном евклидовом пространстве (вещественном и комплексном).

18. Сформулировать теорему о каноническом виде изометрического оператора в вещест-венном евклидовом пространстве.

19. Описать изометрические операторы в $\mathbf{R}^2$.

20. Описать изометрические операторы в $\mathbf{R}^3$.

21. Дать определение самосопряжённого оператора. Описать его спектр и канонический вид. Будет ли этот оператор обратим?

22. Дать определение изометрического оператора. Описать его спектр и канонический вид. Будет ли этот оператор обратим?

VI часть. Вопросы по теории билинейных и квадратичных форм

1. Дать определения линейной формы, матрицы линейной формы. Вывести формулу преобразования матрицы линейной формы при переходе к новому базису.

2. Доказать теорему об общем виде линейной формы в евклидовом пространстве.

3. Дать определения билинейной формы, матрицы билинейной формы в данном базисе. Вывести формулу преобразования матрицы билинейной формы при переходе к новому базису.

4. Дать определение квадратичной формы. Показать, что различные билинейные формы могут определять одну и ту же квадратичную форму.

5. Дать определение симметрической билинейной формы. Доказать, что для каждой квадратичной формы существует единственная симметрическая билинейная форма, из которой она получена.

6. Дать определения квадратичной формы, матрицы квадратичной формы. Показать, как меняется матрица квадратичной формы при переходе к новому базису.

7. Доказать, что для всякой квадратичной формы f в евклидовом пространстве существует самосопряжённый оператор φ, для которого $f(x, x) = (x, \varphi(x))$.

8. Доказать теорему о приведении квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа.

9. Сформулировать теорему о приведении квадратичной формы к каноническому виду методом Якоби.

10. Дать определение нулевого пространства билинейной формы. Вычислить размерность этого пространства. Доказать, что ранг матрицы билинейной формы не зависит от выбора базиса.

11. Дать определения нормального вида квадратичной формы, положительного и отрицательного индексов инерции. Доказать закон инерции.

12. Дать определение положительно определённой квадратичной формы. Вывести критерий положительной определённости квадратичной формы через индексы инерции.

13. Вывести критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы.

14. Дать определение отрицательно определённой квадратичной формы. Вывести критерий отрицательной определённости квадратичной формы через индексы инерции.

15. Вывести критерий Сильвестра отрицательной определённости квадратичной формы.

16. Дать определение матрицы Грама системы векторов $G(a_1, \ldots, a_k)$. Доказать, что определитель этой матрицы неотрицателен и равен нулю тогда и только тогда, когда векторы $a_1, \ldots, a_k$ линейно независимы.

17. Доказать, что для всякой квадратичной формы в евклидовом пространстве существует ортонормированный базис, в котором матрица формы диагональна.

18. Изложить и обосновать метод приведения квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием.

19. Изложить классификацию поверхностей второго порядка в пространстве **R**

V. РЕСУРСЫ

V.1 Основная литература

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры. М.:Факториал Пресс, 2002.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М.:Лаборатория базовых знаний, 2003.

3. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. М.,:Добросвет, 2007.

4. Дополнительная литература

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру.М.:Физматлит, 2001.

2. Кострикин А.И., Манин Ю.И.. Линейная алгебра и геометрия. С.-Петербург:Лань,2005.
3. Андреев К.К., Бусяцкая И.К. Евклидовы пространства. М., МИЭМ, 2005.
4. Андреев К.К., Бусяцкая И.К. Линейные операторы, часть 1. М., МИЭМ, 2007.

5. Андреев К.К., Бусяцкая И.К. Линейные операторы, часть 2. М., МИЭМ, 2008.

6. Андреев К.К., Бусяцкаях И.К. Линейные операторы в евклидовых пространства. М.МИЭМ ВШЭ , 2013.

V.2 Программное обеспечение

V.3 Профессиональные базы данных, информационные справочные системы, интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)

V.4 Материально-техническое обеспечение дисциплины