Демонстрационный вариант экзаменационного задания

общая часть

Задача 1 (20 баллов). Пусть числа $p, q \in \mathbb{C}$ таковы, что многочлен $f = x^3 + px + q$ имеет три различных корня. Существует ли многочлен второй степени, значение которого в каждом из корней многочлена f равно произведению двух других корней многочлена f? Если да, явно вычислите его коэффициенты. Если нет, объясните почему.

Задача 2. Существует ли такая комплексная 3×3 матрица X, что матрица e^X равна

а) [10 баллов] $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$? б) [10 баллов] $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 8 & 5 & -9 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$?

Если да, предъявите такую матрицу явно. Если нет, объясните почему.

Задача 3 (20 баллов). Игральный кубик бросают до тех пор, пока одно и то же число очков не выпадет два раза подряд. Найдите математическое ожидание количества сделанных бросков.

Задача 4 (20 баллов). На координатной плоскости вправо по оси абсцисс с единичной скоростью бежит суслик, а по узкой реке в форме графика функции $y = 1/(x+1)$ плывёт акула, всё время держащаяся в самой близкой к суслику точке реки. Какова абсолютная величина скорости акулы в тот момент, когда она пересекает ось ординат?

специальная часть «математика»

Задача 1 (20 баллов). В клубе «Для Своих» каждый вечер собирается 10 случайных человек. По правилам клуба, все, кто не знаком ни с кем из пришедших, покидают собрание. Затем уходят все те, кто знаком ровно с одним из оставшихся. Далее точно так же последовательно покидают клуб все те, кто имеет ровно 2, 3, … , 9 знакомых среди оставшихся к этому моменту посетителей. Какое наибольшее число посетителей может в конце концов остаться в клубе? Предполагается, что если посетитель N знаком с посетителем M, то и M тоже знаком с N.

Задача 2. Являются ли двумерная сфера с тремя различными выколотыми точками и двумерный тор с одной выколотой точкой

а) [10 баллов] гомеоморфными?

б) [10 баллов] гомотопически эквивалентными?

Задача 3. Допускает ли симметрическая группа S_4

а) [10 баллов] нетривиальный гомоморфизм в группу нечётного порядка?

б) [10 баллов] вложение в группу $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$?

Если да, постройте явный пример. Если нет, объясните почему.

ЗАДАЧА 1 (20 БАЛЛОВ). Функция вещественной переменной x задана в виде несобственного интеграла

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{t^2 + x^2}\, dt\,.$$

Найдите явный вид функции $F(x)$.

ЗАДАЧА 2 (20 БАЛЛОВ). Тонкое проводящее кольцо массы M и радиуса R имеет электрический заряд q. Противоположный ему по знаку точечный заряд $-q$ массы m находится на расстоянии a от центра кольца на проходящей через этот центр перпендикулярно плоскости кольца оси ℓ. В начальный момент кольцо и точечный заряд покоятся. Какую минимальную скорость вдоль оси ℓ надо сообщить точечному заряду, чтобы он смог удалиться сколь угодно далеко от кольца? Какую скорость приобретёт в итоге кольцо? Всеми силами, кроме электростатических, следует пренебречь.

ЗАДАЧА 3 (20 БАЛЛОВ). Однородный тонкостенный цилиндр массы M и радиуса R без проскальзывания скатывается в однородном поле тяжести из состояния покоя по наклонённой под углом α к горизонту плоскости Π так, что его ось всё время остаётся горизонтальной. Определите время, за которое он пройдёт по плоскости Π расстояние s.

Решения задач демонстрационного варианта

Решение задачи 1 общей части

Ответ: такой многочлен заведомо существует. Чтобы написать его, обозначим корни данного многочлена $x^3 + px + q$ через α_1, α_2, α_3. По формулам Виета,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \tag{1}$$
$$\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2 = p \tag{2}$$
$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -q\,. \tag{3}$$

Согласно интерполяционной формуле Лагранжа, квадратный трёхчлен, принимающий при $x = \alpha_1$, α_2, α_3 заданные значения $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_1\alpha_3$, $\alpha_1\alpha_2$, равен

$$\alpha_2\alpha_3\frac{(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)} + \alpha_1\alpha_3\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)} + \alpha_1\alpha_2\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)}\,.$$

Приводя все дроби к общему знаменателю $\varDelta = (\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_1)$ и пользуясь тем, что в силу соотношения (1) при всех $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$

$$(x-\alpha_i)(x-\alpha_j) = x^2 + \alpha_k x + \alpha_i\alpha_j\,,$$

перепишем три слагаемых предыдущей суммы как

$$\begin{aligned}
&+\frac{\alpha_2\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)}{\varDelta}(x^2+\alpha_1 x+\alpha_2\alpha_3)\\
&-\frac{\alpha_1\alpha_3(\alpha_3-\alpha_1)}{\varDelta}(x^2+\alpha_2 x+\alpha_1\alpha_3)\\
&+\frac{\alpha_1\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)}{\varDelta}(x^2+\alpha_3 x+\alpha_1\alpha_2).
\end{aligned}$$

Таким образом, коэффициент при x^2 у искомого квадратного трёхчлена равен

$$\frac{\alpha_2\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2) - \alpha_1\alpha_3(\alpha_3-\alpha_1) + \alpha_1\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)}{(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_1)} = 1$$

(числитель, будучи кососимметричным[1] многочленом от α_1, α_2, α_3, делится на произведение их разностей, частное имеет степень нуль, т. е. является константой, и равно 1, так как лексикографически старшие мономы числителя и знаменателя оба равны $-\alpha_1^2\alpha_2$). Коэффициент при x, с учётом соотношения (3), равен

$$-\frac{q}{\varDelta}\big((\alpha_2-\alpha_1) - (\alpha_3-\alpha_1) + (\alpha_2-\alpha_1)\big) = 0\,.$$

Наконец, свободный член равен

$$\frac{\alpha_2^2\alpha_3^2(\alpha_3-\alpha_2) - \alpha_1^2\alpha_3^2(\alpha_3-\alpha_1) + \alpha_1^2\alpha_2^2(\alpha_2-\alpha_1)}{(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_1)} = p$$

[1] То есть зануляющимся и при $\alpha_3 = \alpha_2$, и при $\alpha_3 = \alpha_1$, и при $\alpha_2 = \alpha_1$.

(частное — однородный симметрический многочлен степени 2 со старшим мономом $\alpha_1\alpha_2$ — это левая часть (2)). Итак, искомый многочлен равен x^2+p.

В принципе, до этого ответа вполне возможно догадаться путём некоторого количества удачно сложившихся проб ☺, после чего проверить его явным вычислением. Другой способ — решить систему из трёх линейных уравнений

$$a\alpha_i^2\alpha_j^2+b\alpha_i\alpha_j+c=\alpha_k^3+p\alpha_k+q$$

на коэффициенты a, b, c искомого квадратного трёхчлена ax^2+bx+c, исключая неизвестные из системы при помощи соотношений (1)–(3).

Решение задачи 2 общей части

Ответы: в (а) — да, в (б) — нет. Объяснение к (б): поскольку $e^Xe^{-X}=E$, все матрицы вида e^X обратимы, а матрица в (б) имеет нулевой определитель.

Напротив, матрица в (а) имеет характеристический многочлен

$$t^3+t^2-t-1=(t+1)^2(t-1)$$

с двукратным корнем $t=-1$ и простым корнем $t=1$. Комплексная аналитическая функция $\ln t$ имеет ветвь, определённую в окрестностях обеих точек $t=\pm1$ и принимающую в этих точках значения $\ln 1=0$ и $\ln(-1)=\pi i$, где $i=\sqrt{-1}\in\mathbb{C}$. Поэтому определён

$$\ln\begin{pmatrix}-2&2&1\\2&-3&-2\\-5&6&4\end{pmatrix}=a\cdot\begin{pmatrix}-2&2&1\\2&-3&-2\\-5&6&4\end{pmatrix}^2+b\cdot\begin{pmatrix}-2&2&1\\2&-3&-2\\-5&6&4\end{pmatrix}+c\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

где константы a, b, c таковы, что квадратный трёхчлен $p(t)=at^2+bt+c$ имеет в точках $t=1$ и $t=-1$ те же разложения Тейлора вплоть до, соответственно, нулевого и первого порядков включительно, что и выбранная нами ветвь логарифма, т. е.

$$p(1)=\ln(1)=0\,,\quad p(-1)=\ln(-1)=\pi i\,,\quad p'(-1)=\ln'(-1)=-1\,.$$

Это приводит к системе линейных уравнений на коэффициенты a, b, c:

$$a+b+c=0\,,\quad a-b+c=\pi i\,,\quad -2a+b=-1\,,$$

решая которую[1], получаем $a=(2-\pi i)/4$, $b=-\pi i/2$, $c=(-2+3\pi i)/4$ и

$$X=\ln\begin{pmatrix}-2&2&1\\2&-3&-2\\-5&6&4\end{pmatrix}=\frac{2-\pi i}{4}\begin{pmatrix}3&-4&-2\\0&1&0\\2&-4&-1\end{pmatrix}-\frac{2\pi i}{4}\begin{pmatrix}-2&2&1\\2&-3&-2\\-5&6&4\end{pmatrix}+\frac{-2+3\pi i}{4}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}1+\pi i&-2&-1\\-\pi i&2\pi i&\pi i\\1+2\pi i&-2-2\pi i&-1-\pi i\end{pmatrix}.$$

[1] Например, по правилу Крамера.

Решение задачи 3 общей части

Ответ: 7. Обозначим через F_n событие, состоящее в том, что при n-м броске впервые выпадает то же число очков, что и при предыдущем броске, через p — вероятность выпадания при очередном броске именно того числа очков, что выпало при предыдущем броске, а через $q = 1 - p$ — вероятность противоположного события. Тогда

$$p = 1/6\,, \quad q = 5/6\,, \quad \mathbb{P}(F_n) = q^{n-2}p$$

(на 2-м, 3-м, … , $(n-1)$-м бросках выпадает не то, что на предыдущем броске, а на n-м броске — то же, что и на $(n-1)$-м). Искомое математическое ожидание равно

$$\sum_{n\geqslant 2} n\cdot\mathbb{P}(F_n) = \sum_{n\geqslant 2} nq^{n-2}p = \frac{p}{q}\sum_{n\geqslant 2} nq^{n-1} = \frac{p}{q}\Big(-1 + \frac{d}{dq}(1-q)^{-1}\Big) =$$
$$= \frac{p}{q}\left(-1 + (1-q)^{-2}\right) = \frac{p}{1-p}\left(p^{-2} - 1\right) = p^{-1} + 1 = 7\,.$$

В третьем равенстве мы воспользовались тем, что функция $(1-z)^{-1} = \sum\limits_{n\geqslant 0} z^n$ аналитична в круге $|z| < 1$, и её производная $(1-z)^{-2} = \dfrac{d}{dz}(1-z)^{-1} = \sum\limits_{n\geqslant 1} nz^{n-1}$.

Решение задачи 4 общей части

Ответ: $\sqrt{2}/4$. Пусть в момент времени t суслик находится в точке $s = s(t) = (t, 0)$, а акула — в точке $a = a(t) = (x(t), y(t))$, где $y = (1+x)^{-1}$. Вектор скорости акулы равен

$$v(t) = \left(x'_t, y'_t\right) = \left(x'_t, y'_x\cdot x'_t\right) = \left(1, -(1+x)^{-2}\right)\cdot x'_t\,. \tag{4}$$

Поскольку a является ближайшей к s точкой графика, вектор

$$\overrightarrow{sa} = \left(x - t, (1+x)^{-1}\right)$$

перпендикулярен вектору $\left(1, -(1+x)^{-2}\right)$, направленному вдоль проходящей через точку a касательной к графику функции $y = (1+x)^{-1}$. Поэтому скалярное произведение этих векторов $x - t - (1+x)^{-3} = 0$, откуда $t = x - (1+x)^{-3}$. По формуле для производной обратной функции $x'_t = 1/t'_x = \left(1 + 3(1+x)^{-4}\right)^{-1}$. Подставляя это в (4) и полагая $x = 0$, получаем $v(t)\big|_{x=0} = (1, -1)/4$.

Решение задачи 1 части «Математика»

Ответ: 8 человек. Такое количество достигается, если 8 посетителей попарно знакомы друг с другом, а также с оставшимися двумя, которые при этом не знакомы между собой. Тогда эти двое имеют ровно по 8 знакомых, а все остальные — по 9. Когда эти двое уйдут, у оставшихся станет по 7 знакомых, и последний исход их не коснётся.

С другой стороны, посетители с минимальным числом знакомых должны уйти с вечеринки. Если такой человек M ровно один, то должны быть люди, с которыми M не знаком. Все они имеют строго больше знакомых, чем M, и после ухода M это число не изменится. Поэтому после ухода M с неизбежностью останутся люди со строго большим, чем у M, числом знакомств, и те из них, у кого это число наименьшее, тоже уйдут. Таким образом, как минимум двое посетителей обязательно покинут клуб.

Решение задачи 2 части «Математика»

Ответы: в (а) — нет, в (б) — да. По теореме Жордана, петля $C \subset \mathbb{R}^2$, являющаяся образом непрерывного вложения $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ окружности в плоскость, всегда разбивает плоскость на компоненты в том смысле, что пространство $\mathbb{R}^2 \smallsetminus C$ не является линейно связным. Очевидно, что теорема Жордана остаётся верной и после удаления из $\mathbb{R}^2$ любого конечного множества точек. Поскольку сфера без точки гомеоморфна[1] $\mathbb{R}^2$, теорема Жордана остаётся верной при замене $\mathbb{R}^2$ на сферу с тремя выколотыми точками. Если бы последняя была гомеоморфна тору с выколотой точкой, то теорема Жордана была бы верна и для тора. Но это не так: на торе есть петли[2], при удалении которых получается пространство, гомеоморфное цилиндру, а он линейно связен. Это доказывает (а).

Что касается (б), то оба пространства гомотопически эквивалентны букету из двух окружностей. В самом деле, тор с выколотой точкой получается из квадрата с выколотой внутренней точкой отождествлением каждой из двух пар противоположных сторон в один отрезок с сохранением ориентации. Квадрат с выколотой внутренней точкой стягивается на свой внешний контур $\square$ так, что все точки контура остаются на месте в процессе гомотопии. В результате последующей склейки противоположных рёбер этого контура получится пара окружностей с одной общей точкой, в которую перейдут все четыре вершины квадрата. Сфера с тремя выколотыми точками стягивается на диск с двумя выколотыми внутренними точками, который в свою очередь стягивается на граф θ, а этот граф — на букет двух окружностей (стягиванием горизонтальной перемычки в точку).

Решение задачи 3 части «Математика»

Ответ в обоих случаях — нет. Так как $|S_4| = 24 = 8 \cdot 3$, нетривиальный гомоморфизм из S_4 в группу нечётного порядка должен иметь ядром нормальную подгруппу порядка 8, но нетривиальные нормальные подгруппы в S_4 исчерпываются[3] знакопеременной подгруппой порядка 12 и подгруппой Клейна, имеющей порядок 4.

Вложение $S_4 \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ задавало бы двумерное эффективное[4] линейное представление группы S_4. Такое представление либо неприводимо, либо является прямой суммой двух одномерных. Но двумерное неприводимое представление S_4 пропускается через эпиморфизм $S_4 \twoheadrightarrow S_3$ и имеет ядром группу Клейна, а оба одномерных представления содержат в ядре знакопеременную подгруппу $A_4 \subset S_4$. Таким образом, любое двумерное линейное представление S_4 обязано иметь нетривиальное ядро.

[1]Например, при помощи стереографической проекции из выколотой точки.

[2]Например, экватор или меридиан.

[3]Один из (многих) способов в этом убедиться таков: каждая нормальная подгруппа является объединением классов сопряжённости, коих в S_4 имеется пять: тождественная перестановка, 3 пары независимых транспозиций, 8 циклов длины 3 и по 6 циклов длины 4 и длины 2, так что число элементов в нормальной подгруппе может быть равно только $1 + 3\varepsilon_1 + 8\varepsilon_2 + 6\varepsilon_3 + 6\varepsilon_4$, где каждый ε_i равен 0 или 1, и вдобавок должно делить 24.

[4]То есть с тривиальным ядром.

Решение задачи 1 части «Математическая физика»

Ответ: $F(x) = \pi e^{-x^2}/2|x|$. По признаку сравнения интеграл абсолютно сходится при $x \neq 0$ и расходится при $x = 0$. В силу чётности подынтегрального выражения по x функция $F(x)$ тоже чётна, и достаточно вычислить её только для $x > 0$. Пользуясь чётностью подынтегрального выражения по t, перепишем F в виде

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{t^2 + x^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(xt)}{t^2 + x^2}\,dt = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{t^2 + x^2}\,dt.$$

Обозначим через $C_R \subset \mathbb{C}$ проходимую против часовой стрелки границу полукруга радиуса R с центром в нуле, лежащего в верхней комплексной полуплоскости и имеющего своим основанием вещественный отрезок $[-R, R]$. Несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{t^2 + x^2}\,dt = \lim_{R\to+\infty} \oint_{C_R} \frac{e^{ixz}}{z^2 + x^2}\,dz\,,$$

поскольку $1/|z^2 + x^2| < 1/|z|^2 \to 0$ равномерно по z при $|z| \to \infty$, и стало быть, вклад от интеграла по полукружности тоже стремится к нулю при $R \to \infty$ по лемме Жордана. Контурный интеграл вычисляется при помощи вычетов. При $R > x > 0$ подынтегральная функция мероморфна в рассматриваемом полукруге, и её особенности исчерпываются единственным простым полюсом в точке ix. Поэтому при $R > x > 0$

$$\oint_{C_R} \frac{e^{ixz}}{z^2 + x^2}\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=ix} \frac{e^{ixz}}{z^2 + x^2} = 2\pi i\,\frac{e^{-x^2}}{2ix} = \frac{\pi e^{-x^2}}{x}\,.$$

Решение задачи 2 части «Математическая физика»

Задачу проще всего решить при помощи законов сохранения импульса и энергии в системе отсчёта, связанной с центром масс кольца и точечного заряда. Пусть в лабораторной системе отсчёта искомая минимальная скорость точечного заряда вдоль оси ℓ равна v_0. Тогда в системе центра масс начальные скорости кольца и точечного заряда равны, соответственно,

$$v_1 = -\frac{mv_0}{M + m} \quad \text{и} \quad v_2 = \frac{Mv_0}{M + m}\,, \tag{5}$$

так как полный импульс в этой системе равен нулю. Помимо кинетической энергии, в начальный момент времени система обладает потенциальной энергией электростатического взаимодействия

$$W = -\varkappa q^2/L, \quad \text{где} \quad L = \sqrt{R^2 + a^2}\,,$$

а коэффициент $\varkappa$ зависит от выбора единиц измерения[1]. Когда кольцо и точечный заряд расходятся на большое расстояние, энергия электростатического взаимодействия становится пренебрежимо малой, и у системы остаётся только кинетическая

[1] В принятой в теоретической физике системе СГСЭ $\varkappa = 1$.

энергия. Если скорость v_0, позволяющая компонентам системы разойтись сколь угодно далеко, выбрана минимальной, то на бесконечно большом удалении друг от друга кольцо и точечный заряд будут иметь в системе центра масс нулевые предельные скорости и нулевую кинетическую энергию. Таким образом, при минимальном v_0 закон сохранения энергии имеет вид[1]

$$\frac{Mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} - \frac{\varkappa q^2}{L} = 0\,.$$

Подставляя сюда значения скоростей из формулы (5), получаем

$$v_0^2 = \frac{2\varkappa q^2(M+m)}{LMm}\,. \tag{6}$$

Отметим, что направление скорости не имеет значения — точечный заряд можно запустить как в сторону кольца, так и от него. Для ответа на второй вопрос задачи заметим, что в системе центра масс кольцо в пределе покоится. Поэтому в лабораторной системе оно будет двигаться со скоростью центра масс в том же направлении, что и точечный заряд. Таким образом, предельная скорость кольца равна

$$\frac{mv_0}{M+m} = \sqrt{\frac{2m\varkappa q^2}{LM(M+m)}}\,. \tag{7}$$

Можно решать задачу и в лабораторной системе отсчёта: обозначить через u_1 и u_2 предельные скорости кольца и заряда при их бесконечном удалении друг от друга, записать законы сохранения полных импульса и энергии

$$mv_0 = Mu_1 + mu_2, \quad mv_0^2 + 2W = Mu_1^2 + mu_2^2\,,$$

выразить из первого уравнения u_2, подставить во второе и получить на скорость u_1 квадратное уравнение $M(M+m)\,u_1^2 - 2Mmv_0\,u_1 - 2mW = 0$, дискриминант которого

$$D/4 = M^2m^2v_0^2 + 2WMm(M+m)$$

при малых v_0 отрицателен, так как $W < 0$. Минимальное значение v_0, при котором уравнение имеет решение, возникает при $D = 0$, что даёт для v_0^2 значение (6). Единственный корень уравнения при этом равен (7). Отметим, что при бо́льших значениях v_0 физический смысл имеет только тот из двух корней u_1, который стремится к нулю при $W \to 0$. Соответствующее ему значение $u_2 \to v_0$. Физически такому предельному переходу отвечает ослабление электростатического взаимодействия.

Решение задачи 3 части «Математическая физика»

Ответ: $2\sqrt{s/(g\sin\alpha)}$. Приведём решение, основанное на законах Ньютона. Направим ось Ox инерциальной системы отсчёта вдоль наклонной плоскости вниз, а ось Oy — перпендикулярно этой плоскости вверх (так что ускорение свободного падения имеет отрицательную проекцию на ось Oy). На цилиндр действуют три силы: сила тяжести Mg, приложенная к его центру масс, сила реакции поверхности N, приложенная

[1] В левой части написана начальная энергия, в правой — предельное значение полной энергии при бесконечном удалении тела от кольца.

в точке касания цилиндра с наклонной плоскостью и направленная вдоль оси Oy, а также приложенная к этой же точке сила трения F, направленная против оси Ox. Движение цилиндра определяется уравнением на движение центра масс и уравнением, описывающем вращение цилиндра вокруг центра масс. Обозначим ускорение центра масс через a, угловое ускорение вращения вокруг центра масс через γ, а момент инерции цилиндра относительно оси вращения через J. Проекция второго закона Ньютона $M\vec{a} = \vec{F} + \vec{N} + M\vec{g}$ на ось Ox имеет вид

$$Ma = Mg \sin\alpha - F\,. \tag{8}$$

Так как по условию ось цилиндра перемещается параллельно самой себе, векторы моментов всех сил параллельны оси вращения, и моменты сил N и Mg равны нулю. Поэтому второе уравнение, связывающее моменты сил и угловое ускорение, скалярно и имеет вид $J\gamma = FR$. Для однородного тонкостенного цилиндра $J = MR^2$, и $a = \gamma R$, так как нет проскальзывания. Тем самым, $F = J\gamma/R = \gamma MR = Ma$. Подставляя это в (8), находим абсолютную величину ускорения центра масс цилиндра

$$a = \frac{1}{2}\, g \sin\alpha\,.$$

При равноускоренном движении путь s из состояния покоя проходится за время

$$\sqrt{\frac{2s}{a}} = 2\sqrt{\frac{s}{g\sin\alpha}}\,.$$

Дополнительные задачи для самостоятельного решения

Приводимые ниже задачи разнятся по своему уровню, и некоторые из них значительно труднее тех, что в среднем предлагаются на вступительных экзаменах на магистерские программы «Математика» и «Математика и математическая физика». Решение этих задач позволит вам, с одной стороны, уверенно и даже с некоторым запасом подготовиться к вступительным испытаниям на факультет, а с другой стороны, даст возможность почувствовать дух того, что ждёт на реальном экзамене — предложенные там задачи будут, скорее всего, немного попроще, но не менее интересны и столь же нестандартны по своим формулировкам.

Задача 1. Найдите количество девятизначных чисел с нечётной суммой цифр.

Задача 2. Найдите максимальное возможное число точек пересечения диагоналей у выпуклого n-угольника.

Задача 3. При первом броске по кольцу баскетболист Косоруков всегда попадает, при втором — промахивается, а при каждом последующем броске вероятность его попадания равна процентной доле числа попаданий во всех предыдущих бросках серии. Какова вероятность того, что в серии из ста бросков будет ровно 50 попаданий?

Задача 4. Может ли группа быть объединением двух своих подгрупп, отличных от единицы и всей группы?

Задача 5. Сколько перестановок в симметрической группе S_n являются произведениями двух различных транспозиций?

Задача 6. Для перестановки $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{smallmatrix}\right) \in S_6$ вычислите σ^{2018}.

Задача 7. Сколько автоморфизмов у абелевой группы $\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2)$?

Задача 8. Найдите порядки групп $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ и $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ над q-элементным полем $\mathbb{F}_q$.

Задача 9. Можно ли вложить поле из девяти элементов в поле из двадцати семи элементов?

Задача 10. Найдите все обратимые элементы в кольце целых гауссовых чисел

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] = \{a + b\sqrt{-1} \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Задача 11. Максимален ли идеал, порождённый элементом x в кольце
а) $\mathbb{C}[x]$ б) $\mathbb{C}[[x]]$ в) $\mathbb{Z}[[x]]$?

Задача 12. Является ли 2 а) простым б) неприводимым элементом кольца

$$\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} \in \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}\,?$$

Задача 13. Приводим ли над полем $\mathbb{Q}$ многочлен а) $x^3 + 27x^2 + 5x + 97$ б) $x^4 + 4$?

Задача 14. Сколько решений имеет уравнение $xyz = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ в натуральных числах?

Задача 15. Найдите кубический многочлен с целыми коэффициентами, корнями которого являются квадраты корней многочлена $x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Задача 16. Чему равно произведение попарных разностей всех комплексных корней степени n из единицы?

Задача 17. Конечно ли множество различных вложений поля $\mathbb{R}$ в поле $\mathbb{C}$?

Задача 18. Можно ли циркулем и линейкой построить правильный 14-угольник?

Задача 19. Докажите, что для любой четвёрки коллинеарных точек p_1, p_2, p_3, p_4 в $\mathbb{R}^2$ и многочленов второй степени $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathbb{R}[x, y]$ определитель 4×4 матрицы $\det(f_i(p_j)) = 0$.

Задача 20. Существует ли матрица с характеристическим многочленом $\chi(t)$ и минимальным многочленом $\mu(t)$ для а) $\chi(t) = (t-1)^2(t-2)^3$, $\mu(t) = (t-1)(t-2)$ б) $\chi(t) = (t^6 - 1)$, $\mu(t) = (t^3 - 1)$ в) $\chi(t) = (t-1)^5(t-2)^5$, $\mu(t) = (t-1)^2(t-2)^3$?
Если да, то приведите явный пример такой матрицы.

Задача 21. Найдите минимальный многочлен квадратной $n \times n$ матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}.$$

Задача 22. Всякое ли открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ представляется в виде объединения счётного семейства замкнутых множеств?

Задача 23. Равносильна ли замкнутость каждого из подмножеств $A, B \subset \mathbb{R}$ замкнутости их произведения $A \times B \subset \mathbb{R}^2$?

Задача 24. Для всякого ли замкнутого подмножества $C \subset \mathbb{R}^n$ найдётся такая последовательность $x : \mathbb{N} \to C$, что каждая точка множества C является её частичным пределом?

Задача 25. Докажите, что каждый непостоянный многочлен $f \in \mathbb{C}[x]$ задаёт собственное[1] отображение $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Задача 26. Существует ли такая непрерывная сюрьекция $f : \mathbb{R}^2 \twoheadrightarrow [0,1]$, что прообраз $f^{-1}(x)$ любого $x \in [0,1]$ ограничен? Может ли f быть монотонной[2]?

Задача 27. С точностью до $0,01$ вычислите $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

Задача 28. Докажите, что для любой интегрируемой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ существует такое число $t \in [0,1]$, что $\displaystyle\int_0^t f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,dx$.

Задача 29. Всякая ли непрерывно дифференцируемая функция $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ представляется в виде разности двух строго возрастающих непрерывных функций?

Задача 30. Пусть для почти всюду[3] дифференцируемой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ почти всюду выполняется равенство $f'(x) = 1$. Следует ли отсюда, что $f(1) - f(0) = 1$?

Задача 31. Докажите, что $\limsup\limits_{n\to\infty} \sin(nx) = 1$ для почти всех $x \in \mathbb{R}$.

Задача 32. Пусть функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ удовлетворяет для всех $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ соотношениям $f(x+1,y) = f(x,y+1) = f(2x+y,x+y) = f(x,y)$. Верно ли, что

а) если f непрерывна, то она постоянна?

б) если f интегрируема по Лебегу, то она почти всюду постоянна?

Задача 33. Найдите фундаментальную группу топологического пространства, полученного из двумерного тора отождествлением каких-то двух его различных точек в одну.

Задача 34. Есть ли элемент бесконечного порядка в фундаментальной группе пространства $\mathbb{R}^3 \smallsetminus X$, где X является объединением оси z, точки $(3,3,0)$ и единичной окружности $x^2 + y^2 = 1$ в плоскости x, y?

Задача 35. Существуют ли такие гладкие функции $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$, что множество

$$X = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 0\}$$

гомеоморфно вещественной проективной плоскости, причём дифференциалы функций f_1, f_2, f_3 линейно независимы в каждой точке множества X?

Задача 36. Вычислите $\displaystyle\int \max(x_1, \dots, x_n)\,dx_1\,dx_2 \dots dx_n$ по кубу $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ в $\mathbb{R}^n$.

Задача 37. Вычислите интеграл $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-q(x)}\,dx_1 \dots dx_n$ для положительно определённой квадратичной формы $q(x) = xAx^t$, где $A = A^t$ вещественная симметричная $n \times n$

[1] Т. е. при котором прообраз любого компакта компактен.

[2] В том смысле, что полный прообраз любого связного множества связен.

[3] По мере Лебега.

матрица, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Задача 38. Для произвольно заданных комплексных матриц A, B размера $n\times n$ вычислите значение при $x = y = 0$ смешанной производной $\partial^2 f / \partial x \partial y$ от матричнозначной функции $f(x, y) = e^{xA+yB}$.

Задача 39. Докажите для голоморфной в единичном диске $|z| \leqslant 1$ функции f равенство

$$\int\limits_{[0,1]} f(x)\, dx = \int\limits_{|z|=1} f(z) \ln(z)\, dz\,,$$

где слева интегрирование ведётся по прямолинейному отрезку $[0, 1] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, а справа — по единичной окружности, обходимой один раз против часовой стрелки, начиная с точки $1 \in \mathbb{C}$, и логарифм действителен на положительной полуоси вещественной прямой $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Задача 40. Известно, что все корни комплексного многочлена имеют положительную мнимую часть. Докажите, что все корни его производной тоже имеют положительную мнимую часть.

Задача 41. Докажите, что сумма вычетов 1-формы $dz / f(z)$ по всем комплексным корням многочлена $f \in \mathbb{C}[z]$ равна нулю, если $\deg f \geqslant 2$. Верно ли это, когда $\deg f = 1$?

Задача 42. Вычислите интеграл $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{1+x^2}\, dx$, где $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Задача 43. Могут ли окружность и парабола на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ пересекаться ровно в двух точках так, что в одной из них окружность касается параболы, а в другой — нет?

Задача 44. Составьте обыкновенное дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют все окружности на плоскости[1].

Задача 45. Найдите систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} \ddot{\varrho} = f(\varrho, \varphi, \dot{\varrho}, \dot{\varphi}) \\ \ddot{\varphi} = g(\varrho, \varphi, \dot{\varrho}, \dot{\varphi}) \end{cases}$$

на полярные координаты в плоскости $\mathbb{R}^2$, решения которой в декартовых координатах (x, y) имеют вид $x = at + b$, $y = ct + d$, где a, b, c, d — произвольные вещественные постоянные.

Задача 46. Найдите производную от решения дифференциального уравнения

$$\ddot{x} - \dot{x} + \theta x = te^{-t}$$

с начальным условием $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ по параметру θ при $\theta = 0$.

[1] Рассматриваемые локально, вблизи точек с невертикальными касательными, как графики функций от одной переменной