

# Программа учебной дисциплины Динамическая оптимизация в экономике и финансах

Утверждена

Академическим советом ООП

Протокол №2.9.1-12/16 от «25» июня 2018 г

Автор	Пильник Н.П., к.э.н., npilnik@hse.ru
Число кредитов	5
Контактная работа (час.)	64
Самостоятельная работа (час.)	126
Курс	3, 4 бакалавриата
Формат изучения дисциплины	без использования онлайн курса

## I. ЦЕЛЬ, РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И ПРЕРЕКВИЗИТЫ

Целью дисциплины «Динамическая оптимизация в экономике и финансах» является освоение обучающимися навыков формулировки и решения экономических задач оптимизации и динамики в рамках развитого аппарата математических моделей.

Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен:

- Знать основные понятия оптимального управления, методы решения задач динамической оптимизации.
- Уметь применять стандартные методы и модели к решению экономических задач, сформулированных в терминах динамических задач и оптимального управления.
- Владеть основными принципами и методами численного и аналитического решения задач динамической оптимизации, навыками применения математических пакетов программ для решения задач на ПЭВМ.

В результате освоения дисциплины студент осваивает следующие компетенции:

Настоящая дисциплина относится к циклу математических и естественно научных дисциплин и блоку дисциплин, обеспечивающих базовую профессиональную подготовку бакалавра экономики.

Для выбора курса обязательно изучение дисциплины «Дифференциальные и разностные уравнения».

Изучение данной дисциплины базируется на следующих дисциплинах:

- Математический анализ
- Линейная алгебра
- Методы оптимальных решений
- Теория игр

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

- Микроэкономика
- Макроэкономика
- Динамические модели общего вычислимого равновесия
- Математическая экономика
- Модели финансовых рынков

## II. СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

№	<b>Тема 1. Вариационное исчисление. Уравнения Эйлера</b>
1	Основные понятия динамической оптимизации. Метод вариации в задачах с неподвижными границами
2	Необходимые условия экстремума функционала. Уравнение Эйлера
3	Вариационные задачи с подвижными границами. Условие трансверсальности
4	Достаточные условия экстремума функционала
5	Условный экстремум. Функционал Лагранжа
6	Динамическая оптимизация стохастических процессов

№	<b>Тема 2. Оптимальное управление. Принцип максимума Понтрягина</b>
1	Фазовые координаты. Управляющие параметры. Общая задача оптимального управления
2	Функция Гамильтона. Вспомогательные переменные. Принцип максимума
3	Модель Рамсея: межвременное размещение ресурсов

№	<b>Тема 3. Динамическое программирование. Принцип Беллмана</b>
	Основные понятия задач динамического программирования. Уравнение Беллмана
	Принцип Беллмана для задач в дискретном времени
	Принцип Беллмана для задач в непрерывном времени
	Экономические приложения. Стохастическая модель банка. Модель односекторной экономики с рынком труда

## III. ОЦЕНИВАНИЕ

*Оценка по дисциплине (2 модуль – экзамен)*

$$O_{\text{накопленный}} = 0,6 \cdot O_{\text{к/р}} + 0,4 \cdot O_{\text{дз}}$$

$$O_{\text{дисциплина}} = 0,5 \cdot O_{\text{экзамен}} + 0,5 \cdot O_{\text{накопленный}}$$

Способ округления результирующей оценки по учебной дисциплине – арифметический.

## IV. ПРИМЕРЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

**Тематика заданий текущего контроля (примерные задания)**

1) Найти первую вариацию функционала  $v[y] = \int_0^1 (y^2 + 2yy' + ye^t) dt$ .

2) Найти допустимую экстремаль функционала

$$v[y] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2 + 4y \cos 2t) dt, \quad y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Оценив приращение функционала, определить, какой из экстремумов достигается на экстремали (максимум или минимум).

3) Найти допустимую экстремаль функционала  $v[y] = \int_0^1 (y'^2 + 2yt) dt, \quad y(0) = 1$ .

- 4) Исследовать на экстремум функционал  $v[y] = \int_0^1 (yy'^2) dt$ ,  $y(0) = 1$ ;  $y(1) = 4$ ;  $y(t) > 0$ .
- 5) Исследовать на экстремум функционал  $v[y] = \int_{-1}^1 (y'^3 + y'^2) dt$ ,  $y(-1) = 1$ ;  $y(1) = 3$ .
- 6) Найти экстремаль функционала  $v[y(t)] = \int_1^2 t^2 y'^2 dt - 2y(1) + (y(2))^2 \rightarrow extr$

## Вопросы для оценки качества освоения дисциплины

### 1. Основы вариационного исчисления

1.1. Метод вариаций в задачах с неподвижными границами.

1.1.1. Понятие функционала. Линейные функционалы.

1.1.2. Вариация и ее свойства. Непрерывность функционала. Слабый и строгий экстремум функционала.

1.1.3. Уравнение Эйлера.

1.1.4. Функционалы вида  $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dx$ .

1.1.5. Функционалы вида  $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx$ . Уравнение Эйлера-Пуассона.

1.1.6. Функционалы вида  $v(z(x, y)) = \iint_D F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx dy$ . Уравнение Остроградского.

1.2. Вариационные задачи с подвижными границами. Условие трансверсальности.

1.3. Достаточные условия экстремума функционала.

1.4. Вариационные задачи на условный экстремум.

1.5. Экономические приложения.

1.5.1. Модель Эванса максимизации прибыли монополистом. Связь эластичности прибыли по цене со скоростью изменения цены.

1.5.2. Инфляция и безработица: динамическая модель.

1.5.3. Динамическая оптимизация в инвестиционных моделях.

1.5.4. Динамическая модель спроса фирмы на труд (модель Хаммермеша).

1.5.5. Экономика истощаемых ресурсов (модель Хотеллинга оптимального режима выработки ресурса). Консервация ресурсов.

1.5.6. Модель Рамсея: межвременное размещение ресурсов.

### 2. Оптимальное управление. Принцип максимума

2.1. Фазовые координаты. Управляющие параметры. Общая задача оптимального управления.

2.2. Функция Гамильтона. Вспомогательные переменные. Принцип максимума.

2.2.1. Динамическая модель фирмы, максимизирующей выручку от продаж (модель Леланда).

2.3. Связь с задачами вариационного исчисления.

## Примеры заданий промежуточного /итогового контроля

1. Имеется пять станков, которые должны быть распределены между тремя предприятиями. Заданы функции дохода предприятий в зависимости от количества выделенных станков:

N	f <sub>1</sub>	f <sub>2</sub>	f <sub>3</sub>
0	0	0	0
1	6	3	10
2	11	6	12
3	12	13	14
4	14	15	14
5	16	17	14

Найти оптимальное распределение станков по предприятиям, при котором суммарный доход будет максимальным. Чему равен этот доход?

2. Найти оптимальное управление  $u$ , фазовую траекторию  $y$  и вспомогательную переменную  $\lambda$  в задаче

$$\begin{cases} V = \int_0^1 \left( y - \frac{u^2}{2} \right) dt \Rightarrow \max \\ \dot{y} = u - y \\ y(0) = 1 \\ u \in R \end{cases}$$

Выяснить, выполнены ли достаточные условия максимума (условия Мангасаряна).

3. Решить задачу №2 при условии  $u \geq 0.5$ .

4. Найти оптимальное управление и фазовую траекторию в задаче

$$\begin{cases} \int_0^2 (2y - 3u - u^2) dt \Rightarrow \max \\ \dot{y} = y + u \\ y(0) = 7,5 - e \\ u \leq e - 2,5 \end{cases}$$

Выяснить, выполнены ли достаточные условия максимума.

## V. РЕСУРСЫ

### *Литература по теме 1:*

Основная:

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – 2-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

Дополнительная:

2. Тракимус Ю.В. Основы вариационного исчисления в примерах и задачах: Учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011.
3. Л. Э. Эльсгольц. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М. Эдиториал УРСС, 2000.

### *Литература по теме 2:*

Основная:

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – 2-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

Дополнительная:

2. Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. Оптимизация: теория, примеры, задачи. – М. Эдиториал УРСС, 2000.
3. Alpha C. Chiang. Elements of Dynamic Optimization. 1992.

**Литература по теме 3:**

Основная:

1. Беленький В.З. Оптимизационные модели экономической динамики: понятийный аппарат; одномерные модели. Центр. экон.-мат. ин-т. – М.: Наука, 2007.

Дополнительная:

2. Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. Оптимизация: теория, примеры, задачи. – М. Эдиториал УРСС, 2000.
3. Alpha C. Chiang. Elements of Dynamic Optimization. 1992.

**Программное обеспечение**

№ п/п	Наименование	Условия доступа
1.	Microsoft Windows 7 Professional RUS Microsoft Windows 10 Microsoft Windows 8.1 Professional RUS	<i>Из внутренней сети университета (договор)</i>
2.	Microsoft Office Professional Plus 2010	<i>Из внутренней сети университета (договор)</i>

**1. Профессиональные базы данных, информационные справочные системы, интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)**

№ п/п	Наименование	Условия доступа
<i>Профессиональные базы данных, информационно-справочные системы</i>		
1.	Консультант Плюс	<i>Из внутренней сети университета (договор)</i>
2.	Электронно-библиотечная система Юрайт	URL: <a href="https://biblio-online.ru/">https://biblio-online.ru/</a>
<i>Интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)</i>		
1.	Открытое образование	URL: <a href="https://openedu.ru/">https://openedu.ru/</a>

**2. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Учебные аудитории для лекционных занятий по дисциплине обеспечивают использование

и демонстрацию тематических иллюстраций, соответствующих программе дисциплины в составе:

- ПЭВМ с доступом в Интернет (операционная система, офисные программы, антивирусные программы);

- мультимедийный проектор с дистанционным управлением.

Учебные аудитории для семинарских и самостоятельных занятий по дисциплине оснащены ПЭВМ, с возможностью подключения к сети Интернет и доступом к электронной информационно-образовательной среде НИУ ВШЭ.