**Аннотация**

**ТЗ-95**

Тема: «Топология и хаос в динамике систем, слоений и деформации алгебр Ли»

Руководитель: О.В. Починка

Наименование подразделения: Лаборатория топологических методов в динамике

**Цель работы:** Развитие методов качественной теории динамических систем, включающее построение энергетических функций, топологическую классификацию, включение каскадов в поток, отыскание устойчивых дуг в пространстве динамических систем, установление связей динамики системы с топологией несущего многообразия, алгоритмизацию различения топологических инвариантов. Разработка новых аналитических и численных методов исследования псевдогиперболических аттракторов, спиральных квазиаттракторов и смешанной динамики многомерных диссипативных систем и их приложений к конкретным моделям. Развитие методов теории деформаций модулярных алгебр Ли и получение классификационных результатов для алгебр Ли характеристики 2. Разработка методов исследования качественного поведения слоений, согласованных с геометрическими структурами. Исследование геометрии расслоений, приложения к динамике. Развитие исчисления функций Чернова.

**Используемые методы**:­ Развитие топологических методов в динамике обогащает обе науки — качественную теорию динамических систем и топологию. Замечательным примером такого взаимодействия является решение одной из важнейших топологических проблем — многомерной гипотезы Пуанкаре (в размерности большей четырех). Для решения этой проблемы С. Смейл, применил теорию градиентных динамических систем, индуцированных функциями Морса. А именно, допуская, что многообразие является гомотопической сферой он доказал, что все критические точки данной функции Морса можно последовательно удалить и перейти к функции в точности с двумя критическими точками индекса 0 и 1.

Применяя топологические и геометрические методы сотрудники лаборатории получили глубокие результаты о взаимосвязи динамических характеристик потоков и каскадов с топологией несущего многообразия. Была изучена структура многообразий допускающая диффеомоорфизмы Морса-Смейла в зависимости от структуры пересечения инвариантных многообразий седловых периодических точек. Обнаружена взаимосвязь вложений инвариантных многообразий с существованием энергетических функций Ляпунова и т. п. Эти результаты были опубликованы в целом ряде ведущих зарубежных и отечественных журналов, что свидетельствует об их соответствии мировому уровню. Полученный задел позволит и далее развивать описанную выше актуальную тематику.

Другим важнейшим достижением современной теории динамических систем, в которой сотрудники лаборатории также являются признанными специалистами, стало открытие смешанной динамики, которая характеризует принципиальную невозможность отделить аттракторы динамической системы от репеллеров. Несмотря на то, что такое явление было обнаружено совсем недавно, уже удалось обнаружить ряд систем из различных приложений, демонстрирующих смешанную динамику. Таким образом, развитие методов исследования смешанной динамики является актуальной задачей как с теоретической, так и с практической точек зрения.

Благодаря сильной алгебро-геометрической ячейке лаборатории планируется распространить понятие хаоса в динамических системах в смысле Дивани на произвольные слоения и исследовать проблему существования хаоса для картановых слоений, а также получить продвижения в классификации простых алгебр Ли над полями малой характеристики.

**Результаты работы:** В ходе выполнения технического задания результаты были получены по нескольким научным направлениям:

1. Развитие методов качественной теории динамических систем.
2. Разработка новых аналитических и численных методов исследования смешанной динамики, псевдогиперболических аттракторов и квазиаттракторов многомерных диссипативных систем и их приложений к конкретным моделям.
3. Развитие методов теории деформаций модулярных алгебр Ли и получение классификационных результатов для алгебр Ли характеристики 2. Развитие исчисления функций Чернова.
4. Разработка методов исследования качественного поведения слоений, согласованных с геометрическими структурами. Развитие вычислительной топологии и ее приложения.

По направлению 1) развитие методов качественной теории динамических систем

1.1. Введен новый инвариант гомеоморфизмов диска с каскадом периодических орбит — схема отображения. Показано, что этот инвариант различает диффеоморфизмы, построенные по разным последовательностям сигнатур. Именно, мы строим диффеоморфизмы двумерной сферы, являющиеся результатами дважды примененной бифуркации удвоения периода к диффеоморфизму источник-сток, с вращением в одну сторону и в разные стороны. Основным результатом работы является доказательство неэквивалентности схем этих диффеоморфизмов, то есть отсутствия гомеоморфизма, переводящего компоненты одной схемы в компоненты другой.

1.2. Изучена структура разбиения четырехмерного фазового пространства на траектории потоков Морса-Смейла, допускающих гетероклинические пересечения. А именно, рассматривается класс  потоков Морса-Смейла на сфере , таких, что неблуждающее множество любого потока  состоит в точности из четырех состояний равновесия: источника, стока и двух седел. Блуждающее множество таких потоков содержит конечное число гетероклинических кривых, лежащих в пересечении инвариантных многообразий седловых состояний равновесия. В работе описывается топология вложения инвариантных многообразий седловых состояний равновесия таких потоков, что является первым шагом в решении проблемы топологической классификации. В частности, доказывается, что замыкания инвариантных многообразий седловых состояний равновесия, не участвующих в гетероклинических пересечениях, являются ручными 2-сферой и дугой. Эти многообразия являются аттрактором и репеллером потока. В множестве орбит, принадлежащих области притяжения аттрактора (отталкивания репеллера) строится секущая, являющаяся многообразием, гомеоморфным прямому произведению . Изучается топология пересечения инвариантных многообразий седловых состояний равновесия с этой секущей.

1.3. Рассмотрен класс диффеоморфизмов Морса-Смейла на сфере размерности четыре и выше, для которых инвариантные многообразия различных седловых периодических точек не пересекаются. Динамика произвольного такого диффеоморфизма может быть представлена как динамика «источник-сток», где «сток» («источник») является связным объединением одномерного и нульмерного неустойчивых (устойчивых) инвариантых многообразий периодических точек. Изучается структура пространства орбит, принадлежащих области притяжения «стока» (области отталкивания «источника») и топология вложения в него сепаратрис седловых периодических точек коразмерности 1.

1.4. Рассмотрен класс диффеоморфизмов Морса-Смейла без гетероклинических пересечений на сфере  размерности . Устанавливаются достаточные условия включения указанных диффеоморфизмов в топологический поток, которые совпадают с необходимыми условиями, полученными Дж. Палисом (что, вообще говоря, неверно в случае ).

1.5. Установлено что для диффеоморфизмов Морса-Смейла, заданных на сфере , , и не имеющих гетероклинических пересечений инвариантных многообразий седловых периодических точек, полным топологическим инвариантом является двухцветный граф. Полученный результат переносится также на случай гомеоморфизмов Морса-Смейла.

1.6. Изучена взаимосвязь между структурой множества состояний равновесия градиентно-подобного потока и топологией несущего многообразия размерности 4 и выше. Вводится класс многообразий, допускающих обобщеное разложение Хегора. Устанавливается, что если неблуждающее множество градиентно-подобного потокa состоит в точности из  узловых и  седловых состояний равновесия индексов Морса  и , то его несущее многообразие допускает обобщенное разложение Хегора рода . Приводится алгоритм построения градиентно-подобных потоков на замкнутых многообразиях размерности  по заданному числу узловых состояний равновесия и заданным числам седловых состояний равновесия различных индексов Морса.

1.7. Изложены результаты по топологической классификации систем Морса-Смейла на замкнутых многообразиях, включая результаты, полученные авторами в последнее время.

1.8. Получена топологическая классификация одномерных базисных множеств диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме  С. Смейла и заданных на ориентируемых поверхностях отрицательной Эйлеровой характеристики, снабженных метрикой постоянной отрицательной кривизны. Используя методы геометрии Лобачевского, каждому совершенному просторно расположенному одномерному аттрактору -диффеоморфизма однозначно ставится в соответствие геодезическая ламинация на поверхности. Устанавливается, что при отсутствии в аттракторе связок степени два, существует гомотопный тождественному гомеоморфизм поверхности, отображающий аттрактор на геодезическую ламинацию таким образом, что непересекающиеся неустойчивые многообразия из аттрактора отображается в различные слои геодезической ламинации. Более того, если неблуждающие множества гомотопных -диффеоморфизмов обладают совершенными просторно расположенными аттракторами без связок степени два, то соответствующие этим аттракторам геодезические ламинации совпадают. Полученные результаты позволят получить топологическую классификацию ограничений -диффеоморфизмов ориентируемых поверхностей на одномерные совершенные просторно расположенные базисные множества посредством псевдоаносовских гомеоморфизмов.

1.9. Выполнена работа по топологической классификации одномерных базисных множеств диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме  С. Смейла и заданных на ориентируемых поверхностях отрицательной Эйлеровой характеристики, снабженных метрикой постоянной отрицательной кривизны. Используя методы геометрии Лобачевского, каждому совершенному просторно расположенному одномерному аттрактору -диффеоморфизма однозначно ставится в соответствие геодезическая ламинация на поверхности. Устанавливается, что при отсутствии в аттракторе связок степени два, существует гомотопный тождественному гомеоморфизм поверхности, отображающий аттрактор на геодезическую ламинацию таким образом, что непересекающиеся неустойчивые многообразия из аттрактора отображается в различные слои геодезической ламинации. Более того, если неблуждающие множества гомотопных -диффеоморфизмов обладают совершенными просторно расположенными аттракторами без связок степени два, то соответствующие этим аттракторам геодезические ламинации совпадают. Полученные результаты позволят получить топологическую классификацию ограничений -диффеоморфизмов ориентируемых поверхностей на одномерные совершенные просторно расположенные базисные множества посредством псевдоаносовских гомеоморфизмов.

1.10. Установлено, что применение хирургической операции С. Смейла к алгебраическому эндоморфизму Аносова, являющимся конечно-листным накрытием степени не меньшей двух, не приводит к построению -эндоморфизма, неблуждающее множество которого содержит одномерный растягивающийся аттрактор.

1.11. Доказано, что градиентно-подобные потоки на замкнутых поверхностях топологически сопряжены тогда и только тогда, когда они топологически эквивалентны. Класс  гладких градиентно-подобных потоков (потоков Морса) на замкнутой поверхности является подклассом множества потоков Морса-Смейла: все они грубые. Их неблуждающее множество состоит из конечного числа гиперболических неподвижных точек и конечного числа гиперболических предельных циклов, также такие потоки не имеют траекторий, соединяющих седловые точки. Хорошо известно, что класс топологической эквивалентности потока Морса-Смейла может быть описан комбинаторно, например, ориентированным графом Пейшото или молекулой Ошемкова-Шарко. Однако, описание класса топологической сопряжённости такой системы уже требует как минимум введения непрерывных инвариантов (модулей), соответствующих периодам предельных циклов. Поэтому один класс эквивалентности содержит континуум классов топологической сопряжённости. Градиентно-подобные потоки являются потоками Морса-Смейла без предельных циклов.

1.12. Получена полная топологическая классификация -устойчивых потоков на поверхностях. Структурно устойчивые (грубые) потоки на поверхностях имеют только конечное число особых точек и конечное число замкнутых траекторий, все они являются гиперболическими, также отсутствуют траектории, соединяющие седловые точки. Нарушение последнего пункта ведёт к -устойчивым потокам на поверхностях, которые не являются структурно устойчивыми. Однако в настоящей работе мы доказываем, что топологическая классификация таких потоков также может быть сведена к комбинаторной проблеме. Полный топологический инвариант это мультиграф, и мы приводим полиномиальный алгоритм различения таких графов с точностью до изоморфизма. Мы также получили графовый критерий ориентируемости несущего многообразия и связанная с графом формула вычисления его эйлерово характеристики. Кроме того, мы даём полиномиальный алгоритм проверки ориентируемости и вычисления эйлеровой характеристики.

1.13. В 1978 году Ж. Палисом было открыто наличие континуума топологически не сопряженных потоков (каскадов) в окрестности системы с гетероклиническим касанием — наличие модулей. В. Ди Мелу и С. Ван Стрин в 1987 году охарактеризовали класс диффеоморфизмов поверхностей с конечным числом модулей. Оказалось, что условие конечности модулей накладывает ограничение на длину цепочки седел, участвующих в гетероклиническом касании, таких седел в цепочке не может быть больше трех. Удивительным образом подобного эффекта не обнаруживается для непрерывных динамических систем. В настоящей работе рассматриваются градиентные потоки функции высоты вертикальной ориентируемой поверхности рода . Такие потоки обладают цепочкой, состоящей из  седловых точек. В настоящей работе устанавливается, что число модулей таких потоков равно . Этот результат является непосредственным следствием достаточных условий топологической сопряженности потоков в окрестности таких систем, установленных в данной статье. Полным топологическим инвариантом топологической эквивалентности для таких систем является четырёхцветный граф, несущий информацию о взаимном расположении ячеек. Оснащение ребер графа аналитическими параметрами — модулями, связанными с седловыми связками, дает достаточные условия топологической сопряженности потоков рассматриваемого класса.

1.14. Выполнен обзор существующих графовых инвариантов для градиентно-подобных потоков на поверхностях с точностью до топологической эквивалентности и разрабатываем эффективные алгоритмы для их различения (напомним, что поток на поверхности называется градиентно-подобным потоком, если его неблуждающее множество состоит из конечного множества гиперболических неподвижных точек, и не существует траекторий, соединяющих седловые точки). Кроме того, мы разработали параметризованный алгоритм для инварианта Флейтас, являющийся линейным, когда число источников фиксировано. В итоге мы показываем, что классы топологической эквивалентности и топологической сопряжённости совпадают для градиентно-подобных потоков, поэтому все предложенные инварианты и алгоритмы различения применимы также для топологической классификации, принимающей во внимание время движения по траекториям. Таким образом, в качестве основного результата данной статьи мы получили множество способов распознать класс эквивалентности и класс сопряжённости произвольного градиентно подобного потока на произвольной поверхности на полиномиальное время.

1.15. Ранее был введен класс диффеоморфизмов Смейла-Виеториса, который содержит ДЕ-отображения Смейла. Здесь нами рассматриваен класс А-диффеоморфизмов Смейла-Виеториса, определяющийся с помощью базовых А-эндоморфизмов многообразий, размерность которых меньше размерности несущих многообразий А-диффеоморфизмов. Показано, что имеется взаимно однозначное соответствие между базисными множествами базового А-эндоморфизма и А-диффеоморфизма Смейла-Виеториса. Для назад-инвариантного базисного множества базового А-эндоморфизма приводится точное описание соответствующего нетривиального базисного множества А-диффеоморфизма Смейла-Виеториса. На основе полученного описания строится бифуркация между различными типами соленоидальных базисных множеств.

1.16. Проблема существования простой дуги, соединяющей две структурно устойчивые системы на замкнутом многообразии входит в перечень пятидесяти важнейших проблем динамических систем. Для потоков Морса-Смейла на произвольном замкнутом многообразии эта проблема была решена Ш. Ньюхаусом и М. Пейшото в 1980 году. Как следует из работ Ш. Матсумото, П. Бланшара, В. Гринеса, Е. Ноздриновой, О. Починки, для каскадов Морса-Смейла препятствия к существованию такой дуги существуют на замкнутых многообразиях любой размерности. В этих работах найдены необходимые и достаточные условия принадлежности одному и тому же простому изотопическому классу для градиентно-подобных диффеоморфизмов на поверхности или трехмерной сфере. Настоящий результат является следующим шагом в этом направлении. Именно, автором установлено, что все грубые меняющие ориентацию диффеоморфизмы окружности лежат в одной компоненте простой связности, тогда как простой изотопический класс грубого сохраняющего ориентацию преобразования окружности полностью определяется числом вращения Пуанкаре.

1.17. Современная качественная теория динамических систем тесно переплетается с достаточно молодой наукой топологией. Многие странные конструкции топологии рано или поздно обнаруживаются в динамике дискретных или непрерывных динамических систем. Здесь нами показано, что дикая дуга Артина-Фокса естественным образом возникает в инвариантных множествах динамических систем.

По направлению 2) разработка новых аналитических и численных методов исследования смешанной динамики, псевдогиперболических аттракторов и квазиаттракторов многомерных диссипативных систем и их приложений к конкретным моделям

2.1. Изучены динамические свойства кельтского камня, движущегося по плоскости. Рассматриваются двухпараметрические семейства соответствующих неголономных моделей, в которых изучаются бифуркации, приводящие к смене типов устойчивых режимов движения камня, а также к возникновению хаотической динамики. Показано, что в таких моделях наблюдаются явления мультистабильности, когда устойчивые режимы различных типов (регулярные и хаотические) могут сосуществовать в фазовом пространстве системы. Показано также, что хаотическая динамика неголономной модели кельтского камня может быть весьма разнообразной. Здесь в соответствующих областях параметров наблюдаются как спиральные странные аттракторы различных типов, в том числе т.н. дискретные аттракторы Шильникова, так и смешанная динамика, когда аттрактор и репеллер пересекаются и почти совпадают. Найден новый сценарий возникновения смешанной динамики в результате обратимой бифуркации слияния устойчивого и неустойчивого предельных циклов.

2.2. Изучены особенности спиральных аттракторов в трехмерной модели Розенцвейга-Макартура, описывающей динамику в пищевой цепочке «жертва-хищник-суперхищник». Хорошо известно, что при значениях параметров, когда эта система является быстро-медленной, в ней возникают спиральные аттракторы, имеющие форму чайной чашки. Мы показываем, что такие аттракторы возникают в результате бифуркационного сценария Шильникова, первый этап которого связан с возникновением мягкой бифуркации Андронова-Хопфа, а в результате последнего этапа возникает гомоклинический аттрактор, содержащий шильниковскую петлю к седло-фокусному состоянию равновесия с двумерным неустойчивым многообразием. Показано, что гомоклинические спиральные аттракторы, вместе с быстро-медленной динамикой системы, приводят к возникновению нового типа пачечной активности в системе. Интервалы быстрых колебаний для такого типа активности чередуются с медленными движениями двух типов: мало амплитудные колебания около седло-фокусного равновесия и движения около устойчивого медленного многообразия быстрой подсистемы. Мы демонстрируем, что пачечаня активность указанного типа может быть как хаотической, так и регулярной.

2.3. Предложен сценарий возникновения смешанной динамики в обратимых двумерных диффеоморфизмах. Ключевым моментом сценария является скачкообразное увеличение размеров странного аттрактора и странного репеллера, возникающее за счет гетероклинических бифуркаций инвариантных многообразий седловых точек, принадлежащих аттрактору и репеллеру. В результате таких бифуркаций странный аттрактор сталкивается с границей своей области притяжения, а странный репеллер — с границей своей области «отталквания», после чего возникает пересечение аттрактора и репеллера. После реализации сценария диссипативная хаотическая динамика, связанная с существованием отделимых друг от друга странного аттрактора и странного репеллера, мгновенно становится смешанной, когда аттрактор и репеллер принципиально не отделимы. Возможность реализации предлагаемого сценария продемонстрирована на одной из известных задач динамики твердого тела, а именно на неголономной модели волчка Суслова.

2.4. Представлен пример странного аттрактора нового типа. Показано, что этот аттрактор принадлежит классу диких псевдогиперболических аттракторов. Такой аттрактор был обнаружен в четырехмерной системе, которая может быть представлена как расширение системы Лоренца.

2.5. Предложен новый метод конструирования трехмерных потоковых систем, обладающих различными хаотическими аттракторами. С помощью предложенного метода построен пример трехмерной потоковой системы, обладающей несимметричным аттрактором Лоренца. В отличии от классического аттрактора Лоренца, обнаруженный аттрактор не обладает симметрией. Однако несимметричный аттрактор, как и классический, относится к классу «настоящих» хаотических, а точнее, псевдогиперболических аттракторов, теория которых была разработана Д. Тураевым и Л.П. Шильниковым. Любая траектория псевдогиперболического аттрактора обладает положительным показателем Ляпунова и это свойство сохраняется для аттракторов близких систем. При этом, в отличии от гиперболических, псевдогиперболические аттракторы допускают гомоклинические касания. Однако бифуркации таких касаний не приводят к рождению устойчивых периодических орбит. На численных экспериментах, при построении, например, диаграмм старшего показателя Ляпунова, в окрестности псевдогиперболического аттрактора, не возникает окон устойчивости, отвечающих возникновению регулярных аттракторов.

2.6. Для поиска несимметричного аттрактора Лоренца мы применяли метод «седловой карты». С помощью построения диаграмм старшего показателя Ляпунова мы показываем, что в окрестности обнаруженного аттрактора действительно не возникает окон устойчивости. Дополнительно мы устанавливаем псевдогиперболичность указанного аттрактора с помощью LMP-метода, представленного недавно в работе Гонченко, Казакова и Тураева.

По направлению 3) Развитие методов теории деформаций модулярных алгебр Ли и получение классификационных результатов для алгебр Ли характеристики 2. Развитие исчисления функций Чернова

3.1. Изучены глобальные деформации алгебры Ли типа  над алгебраически замкнутым полем характеристики 2. Глобальные деформации данной алгебры Ли дают новую простую 34-мерную алгебру Ли характеристики 2. Классификация простых алгебр Ли над алгебраически замкнутыми полями характеристики  к настоящему времени завершена: все простые алгебры Ли либо являются классическими, либо изоморфны алгебрам Ли картановского типа, соответствующим различным дифференциальным формам, или алгебрам Меликяна в случае . Проблема классификации простых алгебр Ли над полями характеристики 2 представляется особенно сложной. В настоящее время построено большое количество конечномерных простых алгебр Ли, относительно которых не известно являются ли они на самом деле новыми, не имеющими аналогов при больших характеристиках основного поля.

3.2. Показано, что в сериях  и  пространство локальных деформаций нетривиально только для алгебр Ли типа  и  в характеристике 2. Глобальные деформации  описаны ранее. Настоящая работа закрывает тему деформаций алгебр Ли серий  и .

3.3. Изучены (при произвольном фиксированном ) задача Коши для уравнения Шрёдингера в пространстве  над полем C

 (1)

3.4. Предполагается, что функция  измерима и обладает локально интегрируемой второй степенью; в том числе предлагаемая техника применима к потенциалам квантового гармонического () и квантового ангармонического (,) осцилляторов. Мы также налагаем на  следующее условие: гамильтониан уравнения (1) на пространстве всех финитных гладких функций самосопряжён в существенном в ; это так, например, когда функция  неотрицательна.

3.5. В настоящее время известно сравнительно небольшое число ситуаций, в которых удаётся явно выразить решение дифференциального уравнения с переменными коэффициентами через эти коэффициенты. Более того, часто формулы для решения, полученные при одних ограничениях на коэффициенты, оказываются непригодными при других, более слабых ограничениях. Выражается это обычно в том, что ранее сходившиеся ряды и интегралы оказываются расходящимися. Обычно эти трудности стараются преодолеть при помощи регуляризаций, позволяющих употреблять прежние формулы, понимая их по-новому. В настоящем сообщении регуляризаций в этом смысле не используется, а доказываются формулы качественно нового вида, дающие решение задачи Коши для уравнения Шрёдингера со сколь угодно быстро растущим на бесконечности неотрицательным потенциалом.

3.6. Предложен метод решения задачи Коши для линейного параболического уравнения эволюционного типа с частными производными и переменными коэффициентами. Метод применяется к уравнению второго порядка (уравнению теплопроводности) с одномерной пространственной координатой и состоит в применении черновской аппроксимационной процедуры к специально построенному семейству операторов сдвига. Доказана равномерная сходимость аппроксимаций к точному решению. Выражение для решения истолковано как формула Фейнмана с сингулярным интегральным ядром.

3.7. Поставлена задача Коши для параболического уравнения , где аргумент  принадлежит бесконечномерному сепарабельному гильбертову пространству , а в роли  выступает дифференциальный оператор с переменными коэффициентами, содержащий производные второго, первого и нулевого порядков. Вторая производная входит в  в виде лапласиана Вольтерры-Гросса, который строится по линейному оператору  с конечным следом так: если  — числовая функция на , то по определению . Решение с помощью теоремы Чернова пишется в виде предела кратных интегалов неограниченно растущей кратности, при этом интегрирование в гильбертовом пространстве ведётся по гауссовской мере с корреляционным оператором, равным произведению оператора  на зависящую от коэффициентов уравнения функцию.

3.8. Рассмотрена задача Коши для одномерного уравнения Шрёдингера с производными сколь угодно высокого порядка и переменными коэффициентами. Частный случай этого уравнения (когда потенциал квадратичный, а коэффициенты перед производными постоянные) можно интерпретировать как уравнение Шрёдингера в импульсном представлении. Найдена формула, выражающая решение задачи Коши через (переменные) коэффициенты уравнения и начальное условие. Формула основана на специально построенном семействе операторов сдвига в  и принадлежащей И.Д. Ремизову формуле  позволяющей строить -полугруппу  по семейству самосопряжённых операторов, касающихся по Чернову самосопряжённого оператора .

По направлению 4) разработка методов исследования качественного поведения слоений, согласованных с геометрическими структурами. Развитие вычислительной топологии и ее приложения:

4.1. Исследована структура группоидов голономии псевдоримановых слоений произвольной коразмерности на -мерных псевдоримановых многообразиях. Получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы слоение на псевдоримановом многообразии являлось псевдоримановым. Дано описание структуры слоев индуцированных слоений на группоидах голономии. Выяснена специфика группоидов голономии трансверсально полных псевдоримановых слоений.

4.2. Для полного картанова слоения  введены два алгебраических инварианта  и , которые называются нами структурными алгебрами Ли. Если трансверсальная картанова геометрия слоения  эффективна, то . Мы доказываем, что равенство нулю гарантирует, что группа всех базисных автоморфизмов слоения  допускает единственную структуру конечномерной группы Ли. В частности, мы получаем достаточные условия для того, чтобы указанная группа была дискретной. Мы получаем некоторые точные (т.е. лучшие из возможных) оценки размерности этой группы в зависимости от трансверсальной картановой геометрии и топологии слоев. Мы строим несколько примеров групп базовых автоморфизмов полных картановых слоений.

4.3. Исследованы слоения , допускающие в качестве трансверсальной структуры вейлеву геометрию, моделируемых на псевдоримановых многообразиях произвольной сигнатуры. Даны различные интерпретации групп голономии слоев таких слоений. Доказан критерий псевдоримановости вейлева слоения. Получены достаточные условия для существования аттрактора для слоения . Более того, доказано, что, если вейлево слоение  полное, то полученное условие гарантирует существование глобального аттрактора этого слоения.

4.4. Для двумерных компактных полиэдров с заданным евклидовым клеточным разбиением, являющихся псевдомногообразиями с краем, разработаны новые эффективные алгоритмы для вычисления базисов групп абсолютных и относительных гомологий по модулю 2.

4.5. Получены численные схемы решения задач механики сплошных сред методом конечных элементов. Ранее был разработан способ ускорения вычислений, состоящий в использовании симплициальной сетки, вписанной в исходное кубическое клеточное разбиение трехмерного тела. В данной работе показано, что препятствие к построению этой конструкции описывается в терминах групп гомологий по модулю два. Основная цель работы — разработка метода устранения этого препятствия. Достижение цели основано на эффективных алгоритмах для вычисления базисов групп гомологий, дуальных относительно формы пересечения.

4.6. Найдены связи между динамикой бездивергентных векторных полей на ориентируемом трехмерном гладком многообразии M и динамикой гамильтоновых систем.