

**Программа учебной дисциплины «Асимптотические методы
исследования нелинейных процессов»**

Утверждена
Академическим советом ОП
Протокол № от __.__.20__

Разработчик	Данилов Владимир Григорьевич, профессор, департамент прикладной математики
Число кредитов	5
Контактная работа (час.)	60
Самостоятельная работа (час.)	130
Курс, Образовательная программа	4, ОП Прикладная математика
Формат изучения дисциплины	без использования онлайн курса

1. Цель, результаты освоения дисциплины и пререквизиты

Целями освоения дисциплины «Асимптотические методы исследования нелинейных процессов» является знакомство с основными типами решений нелинейных уравнений и методами их конструктивного исследования.

Изучение дисциплины базируется на следующих дисциплинах: математический анализ, алгебра, физика, тфкп, дифференциальные уравнения, функциональный анализ, уравнения математической физики, численные методы.

Знания и навыки, приобретенные при изучении данной дисциплины, могут использоваться при подготовке студентами выпускной квалификационной работы, а также в их дальнейшей профессиональной деятельности.

2. Содержание учебной дисциплины

Тема 1. Метод ВКБ. Метод ВКБ с точки зрения метода Уизема на примере линейного уравнения Шредингера с малым параметром. Примеры асимптотических разложений. Уравнение Гамильтона-Якоби как условие разрешимости эталонного уравнения. Уравнение переноса как условие разрешимости уравнения для поправки. Задача Коши для линейного волнового уравнения. (4 лк, 4 см, 16 ср)

Тема 2. Метод Уизема. Метод Уизема на примере нелинейного волнового уравнения (Sin -Гордона). Уравнение Ньютона в случае квадратичного потенциала. Вывод эталонного уравнения и условий его разрешимости. Расцепление условий разрешимости для эталонного уравнения. Уравнение для поправки в случае

одномерного коядра. Построение решения уравнения Sin-Gordona. Уравнение для поправки в случае двумерного коядра. (4 лк, 4 см, 18 ср)

Тема 3. Метод Маслова-Уизема построения стабилизирующихся асимптотических решений. Метод Маслова-Уизема построения стабилизирующихся асимптотических решений на примере уравнения Кортевега-де Фриза. Основные свойства стабилизирующихся асимптотических решений. Примеры аддитивных и мультипликативных асимптотик. Вывод и исследование эталонного уравнения. Эталонное уравнение для уравнений типа КдФ с выпуклой нелинейностью. Вывод и исследование уравнений для поправки. Уравнений для поправки для уравнений типа КдФ с выпуклой нелинейностью. Двухсолитонное асимптотическое решение до взаимодействия. Уравнение типа КдФ с малой правой частью. (4 лк, 4 см, 18 ср)

Тема 4. Введение в теорию гиперболических законов сохранения. Обобщенные решения законов сохранения. Интегральное тождество, вывод условий на скачке. Квадратичный закон сохранения. Построение разрывных решений методом характеристик. Условия разрешимости. Примеры решения задачи Коши. (4 лк, 4 см, 18 ср)

Тема 5. Вязкая регуляризация гиперболических законов сохранения. Построение асимптотических решений типа ударных волн. Уравнение с малым параметром Бюргерса, априорные оценки решения. Замена Хопфа-Коула, примеры построения решений. Построение асимптотических решений типа ударных волн. Вывод эталонного уравнения и условий его разрешимости. Интегрирование эталонного уравнения. Решение эталонного уравнения в случае выпуклой нелинейности. Вывод уравнения для поправки и анализ его разрешимости. Интегральное представление для решения уравнения для поправки. Сшивание решений в и вне окрестности разрыва. (4 лк, 4 см, 18 ср)

Тема 6. Обобщенные функции. Обобщенные функции: сходимость в слабом смысле, дифференцирование по параметру. Малые в слабом смысле величины. Примеры обобщенных функций и их свойств. Пример Шварца неассоциативности умножения. Аппроксимации обобщенных функций гладкими, моментные разложения. Примеры обобщенных функций и их аппроксимаций. Разложения аппроксимаций в асимптотические ряды. Асимптотические алгебры обобщенных функций. Алгебры гармонических аппроксимаций. (4 лк, 4 см, 18 ср)

Тема 7. Слабые асимптотические решения. Слабые асимптотические решения на примере законов сохранения в случае скачков постоянной величины. Построение решения в случае общего начального условия. Слабая асимптотика взаимодействия ударных волн для одномерного скалярного закона сохранения.

Вывод условий на скачке с помощью интегрального тождества. Взаимодействие на переменном фоне. Образование скачка в результате взаимодействия слабых особенностей. Слабая асимптотика распада разрыва. Построение решения в случае общего начального условия. Образование разрыва на подмногообразии коразмерности 1. Решение уравнения для функции, описывающей распад разрыва. Слабая асимптотика взаимодействия солитонов в уравнении типа КдФ: построение анзатца, вывод основных уравнений, изучение их свойств и асимптотик. Сравнение анзатца асимптотического решения с точной формулой для уравнения КдФ. Сравнение уравнений, описывающих решение в интегрируемом и неинтегрируемом случае. (6 лк, 6 см, 24 ср)

3. Оценивание

Итоговая оценка по дисциплине рассчитывается по формуле:

$$O = 0.25 * O_{дз} + 0.25 * O_{кр} + 0.5 * O_{экзамен},$$

где $O_{дз}$ – оценка за выполненное домашнее задание, $O_{кр}$ – оценка за контрольную работу, $O_{экзамен}$ – оценка за экзамен.

Способ округления итоговой оценки по учебной дисциплине: арифметический.

4. Примеры оценочных средств

Примерный вариант контрольной работы:

1. Построить асимптотическое осциллирующее решение уравнения

$$\varepsilon^2 (u_{tt} - u_{xx}) = u - u^3.$$

2. Доказать, что в $D'(R^1)$ справедливо равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-\frac{(x-a)^2}{\varepsilon}} = c \delta(x-a)$$

и вычислить константу c .

3. Решить задачу Коши

$$u_t + (3u^2)_x = 0, \quad u|_{t=0} = -x.$$

Примерный вариант домашнего задания

1. Построить асимптотические решения уравнения КдV-Бюргерса

$$\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} \right) = -\varepsilon^\alpha u_{xxx} + \varepsilon^\gamma u_{xx}$$

при различных $\alpha, \gamma \geq 0$ методом Уизема-Маслова.

2. Взаимодействие устойчивых и неустойчивых скачков для уравнения

$$u_t + f(u)_x = 0.$$

Примерный перечень вопросов к экзамену по курсу:

1. Метод Уизема для линейного уравнения Шредингера.
2. Метод Уизема для нелинейного волнового уравнения. Решение эталонного уравнения.
3. Решение уравнения для следующего приближения, случай одномерного коядра.
4. Решение уравнения для следующего приближения, случай двумерного коядра.
5. Стабилизирующиеся асимптотические решения, основные свойства.
6. Вывод эталонного уравнения для уравнения Бюргера. Условия его разрешимости.
7. Вывод уравнения для поправки и его разрешимость.
8. Сшивание и решение в целом.
9. Обобщенные функции: дифференцирование, дифференцирование по параметру, регуляризация, малость в слабом смысле.
10. Асимптотические алгебры обобщенных функции с одноточечным и многоточечным сингулярным носителем.
11. Слабое асимптотическое решение уравнения Хопфа.
12. Слабая асимптотика взаимодействия ударных волн.
13. Слабая асимптотика взаимодействия слабых разрывов, образование скачка.
14. Образование скачка в многомерном случае.
15. Анзатц для слабого асимптотического решения, описывающего взаимодействие солитонов.
16. Слабая асимптотика взаимодействия солитонов. Отличие интегрируемого случая от неинтегрируемого.

5. Ресурсы

5.1. Рекомендуемая основная литература

№п/п	Наименование
1	Dafermos, Constantine. Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics / Constantine Dafermos. – Springer, 2005 (доступ по подписке НИУ ВШЭ)
2	Freidlin, Mark. Random Perturbations of Dynamical Systems / Mark Freidlin, Alexander Wentzell. – Springer, 2012 (доступ по подписке НИУ ВШЭ)

5.2. Рекомендуемая дополнительная литература

№п/п	Наименование
------	--------------

1	Danilov, V.G. Shock wave formation process for a multidimensional scalar conservation law / V.G. Danilov, D. Mitrovic //Quart. Appl. Math. – 2011. – 5 Vol. 69 (4). – P. 613–634. (доступ по подписке НИУ ВШЭ)
2	Danilov, V. G. Generalized solutions describing singularity interaction / V. G. Danilov // Int. J. Math. Math. Sci. – 2002. – Vol. 29 (8). – P. 481–494. (доступ по подписке НИУ ВШЭ)
3	Danilov, V.G. Delta-shock wave type solution of hyperbolic systems of conservation laws / V. G. Danilov, V. M. Shelkovich //Quart. Appl. Math. – 2005. – Vol. 63 (3). – P. 401–427 (доступ по подписке НИУ ВШЭ)
4	Albeverio, S. Global in time solutions to Kolmogorov-Feller pseudodifferential equations with small parameter / S. Albeverio, V. G. Danilov // Russ. J. Math. Phys. – 2011. – Vol. 18 (1). – P. 10–25. (доступ по подписке НИУ ВШЭ)
5	Albeverio, Sergio. Construction of global-in-time solutions to Kolmogorov-Feller pseudodifferential equations with a small parameter using characteristics / Sergio Albeverio, Vladimir Danilov //Math. Nachr. – 2012. – Vol. 285 (4). – P. 426–439. (доступ по подписке НИУ ВШЭ)

5.3. Программное обеспечение

№п/п	Наименование	Условия доступа/скачивания
		<i>Например, из внутренней сети университета (договор)/ свободное лицензионное соглашение</i>

5.4. Профессиональные базы данных, информационные справочные системы, интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)

№п/п	Наименование	Условия доступа/скачивания
1	EqWorld- Мир математических уравнений	Свободный доступ, http://eqworld.ipmnet.ru/indexr.htm

5.5. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебные аудитории для лекционных занятий по дисциплине обеспечивают использование и демонстрацию тематических иллюстраций, соответствующих программе дисциплины в составе:

– ПЭВМ с доступом в Интернет (операционная система, офисные программы, антивирусные программы);

– мультимедийный проектор с дистанционным управлением.

Учебные аудитории для самостоятельных занятий по дисциплине оснащены ПЭВМ, с возможностью подключения к сети Интернет и доступом к электронной информационно-образовательной среде НИУ ВШЭ.

6. Особенности организации обучения для лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

В случае необходимости, обучающимся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья (по заявлению обучающегося) а для инвалидов также в соответствии с индивидуальной программой реабилитации инвалида, могут предлагаться следующие варианты восприятия учебной информации с учетом их индивидуальных психофизических особенностей, в том числе с применением электронного обучения и дистанционных технологий:

6.1.1. *для лиц с нарушениями зрения:* в печатной форме увеличенным шрифтом; в форме электронного документа; в форме аудиофайла (перевод учебных материалов в аудиоформат); в печатной форме на языке Брайля; индивидуальные консультации с привлечением тифлосурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации.

6.1.2. *для лиц с нарушениями слуха:* в печатной форме; в форме электронного документа; видеоматериалы с субтитрами; индивидуальные консультации с привлечением сурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации.

6.1.3. *для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:* в печатной форме; в форме электронного документа; в форме аудиофайла; индивидуальные задания и консультации.

7. Дополнительные сведения

